高１・高２ ハイレベル数学Ａを受講する皆さんへ

ようこそ，スタディサプリ 高１・高２ハイレベル数学Ａの講座へ。この講座は

「基本問題だけではなく，応用問題を自力で解けるようになりたい」

という人に適した講座となっています。

数学Ａでは，高校数学の礎（いしずえ）とも言える内容を学習します。この講座では，それまでに学び，また標準的な問題を解くことで自分のものになったはずの知識・技能を振り返りながら，その活用の仕方を，問題を通じてじっくり深く学んでいきます。

この講座を受講いただくことで，知識・技能のもつ意味や，その使い方，使う場面を体験することができます。また，なぜそういった手法を取るのか，それによって何が解決できるのか，を学ぶことで，解法に対する納得感が高まります。そのため，解法を丸暗記する必要がなく，さらに，今後の学習で出会う様々な問題の中で広く使える数学的な見方・考え方が身についていきます。この講座を通じて数学Ａと新たな気持ちで向き合うことで

「なるほど，そういうことか！」を積み重ね，自分の成長を実感する

ことができると確信しています。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。スタディサプリの講師は，いつでも「あなた」が真剣に学びに向かう姿を思い浮かべながら授業をしています。あなたが本気で講師から学び，学んだことが何だったのかを考え，問題を通じてそれを確認し，自分のものにする，そういった一連の体験をこの講座を通じて提供いたします。そして，あなたがそうして得たことを，様々なアウトプットを通じて，今度はあなたが誰かに伝えていただきたいと思います。

講義を１回受けてわからなければ，何度でも，自分のペースで講義を見返すことが可能です。ただし，最初から完璧な理解を目指す必要はまったくありません。まずは「たぶんこういうことなんだろうな」といったように，全体像をざっくり捉えることから始めましょう。その状態で先に進み，前に学んだ知識・技能や解法の一部または全部を使うことで，その真意がわかる，というのも数学ならではですし，気になった時点で前に戻り，改めて理解を深める，ということも可能です。その学び方やペースは，他の人と比較する必要はありません。

学びにおいて，主役は「あなた」です。

あなたの，あなたならではの学びを，この講座が力強くサポートします。ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

目次

第１章　場合の数と確率

第１講　場合の数
PART1　集合の要素と個数
PART2　和の法則と積の法則
PART3　完全順列

第２講　順列
PART1　順列
PART2　円順列・じゅず順列
PART3　重複順列

第３講　組合せ
PART1　組合せ
PART2　同じものを含む順列
PART3　重複組合せ

第４講　事象と確率
PART1　場合の数と確率
PART2　和事象の確率・余事象の確率
PART3　最大値・最小値の確率

第５講　さまざまな試行と確率，期待値
PART1　反復試行の確率
PART2　条件付き確率
PART3　期待値

第２章　図形の性質

第６講　三角形の性質
PART1　三角形の内心，角の二等分線の性質
PART2　三角形の外心・垂心
PART3　チェバの定理・メネラウスの定理

第７講　円の性質
PART1　方べきの定理
PART2　方べきの定理，内接四角形の性質
PART3　接弦定理とその逆

第３章　数学と人間の活動

第８講　約数と倍数

PART1　最小公倍数と最大公約数

PART2　余りによる分類，合同式

PART3　ピタゴラス数

第９講　ユークリッドの互除法，整数の性質の活用

PART1　不定方程式（2 元 1 次）

PART2　いろいろな不定方程式

PART3　n 進数

講座の受講の仕方

ここでは,効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い，実力をつけていきましょう。

①　テキストについて

この講座のテキストは，講ごとに３つのPART（セクション）に分かれています。

各PARTは，次のような項目で構成されています。

「講義問題」（1，2など）

⇒　そのPARTで学ぶべき内容を含んだ問題。

PARTによっては，1[1]，1[2]のように分かれている場合もあります。

「Point Pickup」

⇒　「講義問題」を解くために必要な知識・技能や考え方，方針を整理

「確認問題」

⇒　「講義問題」で学んだことを確認するための問題

「講義問題」「Point Pickup」については，「動画」で解説を行います。「講義問題」の予習は必要ありませんが，あらかじめ自分で解けるところまで解いてから，「動画」を見ても構いません。

②　講義動画について

受講の準備ができましたら,テキストと筆記用具を手元におき,動画を再生してください。そして,真剣に受講して,先生がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

各講に含まれるPART内の動画は，１つまたは複数のチャプターに分かれています。

（例）　第１講　場合の数

PART1　集合の要素と個数　　…　【講義問題1】

PART2　和の法則と積の法則　…　【講義問題2[1]】・【講義問題2[2]】

それぞれのPARTにおける主な受講の流れを説明します。

(1)　【講義問題】のチャプターで，講義問題を解く上で必要な知識，用語，公式等を「Point Pickup」を交えながら説明します。その後，講義問題を解説していきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを，そのプロセスも含めて動画でじっくり学んでください。途中で動画を一時停止しながら，途中計算等をテキストやノートに書

いていただいて構いませんが，大切なのは集中して授業を受講することです。「別冊解答」には，講義問題の解答解説が掲載されておりますので，動画の途中計算をすべて書き写す必要はありません。書くことに集中するのではなく，講師の言葉一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

⑵ 解説された講義問題を，何も見ずに自分で解いてみましょう。途中で手が止まってしまった場合は，自分で書いた途中計算や別冊解答を参照し，また必要に応じて講義問題の動画を見直し，どこに手が止まった原因があったのかを振り返り，その続きからまた解き進めてみましょう。最後まで解ききったら，自分で書いた解答を最初から最後まで読み，その流れを把握することをオススメいたします。

各 PART の学習の流れを，今一度確認してみましょう。

「講義問題＆ Point Pickup を通じて学ぶ」→「自分で問題を解く」

1 つの PART でおよそ 15 分～ 30 分程度の受講時間となります。

各講に含まれる3つのPARTの受講が終了すると，その講が終了します。時間がない時は，PART 単位の受講でも構いません。また，週末にまとめて 1 講分受講してもよいでしょう。

大切なのは

・「新しい知識や考え方，その使い方や場面を知って，思考の幅を広げる」

・「講師が伝えたこと」を「自分で他の人に伝えられるようにする」

・「問題が解けるようになることがゴールではなく，なぜそう解くのかを学ぶ」

という気持ちで受講することです。

動画で学ぶことに慣れていない人や，応用問題から学んだ経験が少ない人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれません。ですが，安心してください。この講座は，好きなところで動画を停止できます。「ん？」と思ったら止めて，いま伝えられたことがどういう意味をもつのかを考えること，必要なら戻って何度も再生すること。焦る必要はありません。そして，講座の受講を進めていくうちに，感じ取り，表現できるスキルが向上することで，一度で聞き取れる，感じ取れる内容が増えていくでしょう。

もう 1 つ大切なこと，それは

・「やっぱり自分はできない」は厳禁！

だと言うことです。あきらめず，何度でもチャレンジすること。あなたには，あなたがまだ気づいていないかもしれない，「理解する力」が必ずあります。

③　復習について

その日の動画の受講が完了したら

・この講(PART)から何を知ったか，何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。必要に応じてテキストをもう一度見直してみましょう。

また，後日，講義問題をもう一度解くことで，

・この PART を受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，まずはノートや別冊解答を，それでも思い出せない場合は動画を見直してみましょう。学んだ記憶がよみがえるはずです。

・「復習することで，学びを実感し，学びを自分のものにする」

という気持ちを忘れないようにしましょう。

④　確認問題について

①～③が終わると，自分がその PART の内容を本当に理解しているのかを，別の問題で確かめたくなるはずです。各 PART の終わりに「**確認問題**」を用意してあります。講義問題と同様，その PART で学んだことを思い出しながら，自力で解いてみましょう。

・「問題を解くことで，知識を引き出し，それを活用する練習をする」

単なる反復練習ではなく，学んだことを思い出しながら，自覚しながら解く，それを忘れないでください。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まります。これは今後，数学 A を活用するための貴重な経験としてあなたに刻まれていきます。

受講を続ける上で大切なのは

・ペースを作り，守る

ことです。各 PART，およそ 15 分～ 30 分。それを，どの曜日のどの時間帯に何 PART (何講)受講するのかを決めるとよいでしょう。そして，決めた曜日の決めた時間に，確実に受講する習慣を身につけましょう。あなたが学校で時間割に沿って授業を受けるのと同じように，まずはあなたのスケジュールに『スタディサプリ』を受講する時間，数学 A と本気

で向き合う時間，これを組みこんでください。学校の宿題等，何があっても，決めたペースを守ることを心がけ，できない理由を作らないこと。それを愚直なまでに繰り返すことで，確実な「理解力向上」「実力向上」，そしてそれを実現している自分の姿があることに気づき，それが「自信」につながります。

この「高 1・高 2 ハイレベル数学 A」は，これまでの学習や問題演習で培った知識・技能を活用する方法や場面を経験するための講座ですが，ご紹介できているのはその方法や場面のほんの一部となります。受講後は，**「高 1・高 2 トップレベル数学ⅠAⅡB+C(ベクトル)」**に進んでみてください。自分のもっている知識に，さらにこんな使い方があるのか，という気づきが得られ，その気づきにより，もっとできることを増やしたい，活用の幅を広げたい，そう思うはずです。それこそが，無限に拡がる数学 A の世界への第一歩を踏み出した瞬間です。

[MEMO]

[MEMO]

第 1 講　場合の数

PART1　集合の要素と個数

1　1 から 100 までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ。

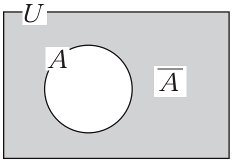
(1)　2 でも 3 でも割り切れない整数

(2)　2 でも 3 でも 5 でも割り切れない整数

Point Pickup

全体集合 U の部分集合 A と補集合 $\overline{A}$ について

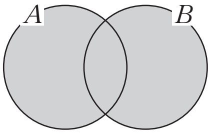
$$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$$

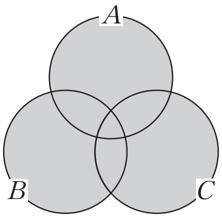


和集合の要素の個数について

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$





第１講　PART1　確認問題

1　1 から 200 までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ。

(1)　3 でも 4 でも割り切れない整数　［アイウ］個

(2)　3 でも 4 でも 7 でも割り切れない整数　［エオ］個

PART2　和の法則と積の法則

2　［1］　$x+y \leqq 4$ を満たす正の整数 x，y の組はいくつあるか。

［2］　(1)　$(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ の展開式における異なる項は何個あるか。

(2)　360 の正の約数の個数と，その総和を求めよ。

Point Pickup

［1］　和の法則

ある事柄が，同時に起こらない２つの事柄Ａ，Ｂに分けられ，Ａの起こり方が a 通りあり, Ｂの起こり方が b 通りあるとき, ある事柄が起こる, すなわちＡ, Ｂのいずれかが起こる場合の数は $a+b$ 通りである。

［2］　積の法則

事柄Ａの起こり方が a 通りあり，そのそれぞれに対して，事柄Ｂの起こり方が b 通りあるとき，Ａ，Ｂがともに起こる場合の数は $a \times b$ 通りである。

第 1 講　PART2　確認問題

1　$x+y \leqq 3$ を満たす 0 以上の整数 x, y の組はいくつあるか。

[アイ] 組

2　$(a+b+c)(d+e+f)(g+h+i+j+k)$ の展開式における異なる項は何個あるか。

[ウエ] 個

3　756 の正の約数の個数と，その総和を求めよ。

約数の個数　[オカ]

約数の総和　[キクケコ]

PART3　完全順列

3　n 冊の異なる本が，それぞれ対応するブックケースに１冊ずつ入っている。次の(1)～(3)において，本をブックケースから取り出したあと，すべて間違ったブックケースに入れる方法は，何通りあるか。ただし，ブックケースはすべて異なるとする。

(1)　$n=3$ のとき

(2)　$n=4$ のとき

(3)　$n=5$ のとき

Point Pickup

１から n までの整数を１列に並べた順列のうち，すべての k について

　　k 番目が k ではない

を満たすものを「完全順列」(または「攪乱(かくらん)順列」)という。

完全順列の総数は，樹形図をかいて求めることができる。

また，$n \geqq 4$ のときには，$n-1$，$n-2$ のときの結果を利用して求めることができる。

第 1 講　PART3　確認問題

1　n 人が 1 人 1 個ずつプレゼントを持ち寄り，プレゼント交換を行う。次のそれぞれの場合において，n 人全員が自分以外のプレゼントを受け取る交換方法は何通りあるか。

$n=3$ のとき　[ア] 通り

$n=4$ のとき　[イ] 通り

$n=5$ のとき　[ウエ] 通り

第 2 講　順列

PART1　順列

1　［1］　父母と子供 3 人が 1 列に並ぶとき，次の問いに答えよ。

(1)　父母が両端にくる場合は何通りあるか。

(2)　父母の間に子供が 2 人以上入る場合は何通りあるか。

［2］　6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数をつくる。このとき，次のものは何個できるか。

(1)　3 の倍数　　(2)　324 より小さい整数

Point Pickup

［1］　条件がついている部分を最優先に処理するとよい。

(2)　父母の間に入る子供の人数は 3 人，2 人，1 人，0 人の場合がある。

・条件に当てはまるものの総数をすべて求める。

・すべての並び方の総数から条件に当てはまらないものの総数を除いて求める。

［2］　0 は最高位にくることができないことに注意。

(1)　3 の倍数となる数字の組合せを求め，それぞれの組合せにおける順列を求める。

(2)　最高位を固定し，残りの桁の数字を決める。

第 2 講　PART1　確認問題

1　A，B，C，D，E，F の 6 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1)　A，B が両端にくる並び方 [アイ] 通り

(2)　A，B の間に 2 人以上入る並び方 [ウエオ] 通り

5 個の数字 0，2，4，6，8 から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数をつくる。このとき，次のものは何個できるか。

2　3 の倍数 [カキ] 個

3　684 より小さい整数 [クケ] 個

PART2　円順列・じゅず順列

2　立方体の各面を塗り分ける。次のような塗り分け方は何通りあるか。ただし，隣り合った面は異なるように塗り，立方体を回転させて一致するものは同じ塗り方とする。

(1)　赤，青を含む 6 色をすべて使い，赤の向かい側の面が青になるように塗る。

(2)　異なる 6 色をすべて使って塗り分ける

(3)　異なる 5 色をすべて使って塗り分ける

Point Pickup

回転すると一致するものを同じものとみなす順列の総数は，

異なる n 個のものの円順列の総数　$\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$

じゅず順列の総数　$\dfrac{(n-1)!}{2}$

の求め方，およびその考え方を用いて，重複するものを除く。

第 2 講　PART2　確認問題

1　正三角錐の各面を異なる 4 色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか。ただし，側面は正三角形ではなく，正三角錐を回転させて一致する塗り方は同じとみなす。

[ア] 通り

正三角柱の各面を，次のように塗り分ける方法は何通りあるか。ただし，隣り合った面は異なるように塗り，正三角柱を回転させて一致する塗り方は同じとみなす。

2　異なる 5 色すべてを使って塗り分ける方法

[イウ] 通り

3　異なる 4 色すべてを使って塗り分ける方法

[エ] 通り

PART3　重複順列

3　6 個の異なる球がある。

(1)　6 個の球を A，B の 2 つの箱に，空箱ができないように分ける方法は何通りあるか。

(2)　6 個の球を 2 組に分ける方法は何通りあるか。

(3)　6 個の球を A，B，C の 3 つの箱に，空箱ができないように分ける方法は何通りあるか。

Point Pickup

1 個目，2 個目，……，r 個目のすべてにおいて，それぞれ n 通りの選び方があるとき，その選び方の総数は

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\cdots\times n}_{r\text{ 個}}=n^r$$

通りある。これは，異なる n 個のものから，重複を許して r 個を取り出して並べる順列の総数であり，n 個から r 個取る「重複順列」という。

第 2 講　PART3　確認問題

1　次の問いに答えよ。

(1)　7 人を A，B の 2 組に分ける方法は何通りあるか。ただし，どの組にも 1 人以上入るものとする。

アイウ 通り

(2)　7 人を 2 組に分ける方法は何通りあるか。

エオ 通り

(3)　7 人を A，B，C の 3 組に分ける方法は何通りあるか。ただし，どの組にも 1 人以上入るものとする。

カキクケ 通り

第 3 講　組合せ

PART1　組合せ

1　［1］　次が成り立つことを証明せよ。

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} \quad (0 \leqq r \leqq n)$$

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r \quad (1 \leqq r \leqq n-1,\ n \geqq 2)$$

［2］　8 人を次のように分ける方法は何通りあるか。

(1)　4 人，3 人，1 人の 3 組に分ける

(2)　4 組に分ける

Point Pickup

［1］　異なる n 個から異なる r 個を取り出す組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ に対し，${}_n\mathrm{C}_{n-r}$ や ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，${}_{n-1}\mathrm{C}_r$ が表す組合せを考える。

［2］　分けるものが区別できる組分けにおいて，振り分ける個数が同じで分ける組に名前がない等，区別できない組が n 組ある場合は，まず組を区別して組分けを行い，その後，その結果を $n!$ で割る。

各組に振り分ける個数が不明な場合は，振り分ける個数を決め，組分けを行う方法がある。

第 3 講　PART1　確認問題

1 次の等式を証明せよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} \quad (0 \leqq r \leqq n)$$

(証明)

${}_n\mathrm{C}_r$ は，[ア] の総数である。

[ア] の総数は，[イ] の総数と等しい。

[ウ] は，[イ] の総数であるから，${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ が成り立つ。

[[ア] の選択肢]

① 異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶ組合せ

② 異なる r 個のものから異なる n 個を選ぶ組合せ

[[イ] の選択肢]

① 異なる n 個のものからある特定の 1 個を選ぶ組合せ

② 異なる r 個のものからある特定の 1 個を選ぶ組合せ

③ 異なる n 個のものから残す $n-r$ 個を選ぶ組合せ

④ 異なる r 個のものから残す $n-r$ 個を選ぶ組合せ

[[ウ] の選択肢]

① ${}_n\mathrm{C}_{n-r}$　② ${}_n\mathrm{C}_1$　③ ${}_{n-1}\mathrm{C}_{n-r}$　④ ${}_{n-1}\mathrm{C}_1$

⑤ ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$　⑥ ${}_r\mathrm{C}_{n-r}$　⑦ ${}_r\mathrm{C}_1$

2 次の等式を証明せよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}\quad (1\leqq r\leqq n-1,\ n\geqq 2)$$

(証明)

異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶことは，次の 2 つの場合に分けられる。

(i) [エ] を選ぶ場合　　(ii) [エ] を選ばない場合

(i)は [オ] を選ぶ場合であり，(ii)は [カ] を選ぶ場合である。

(i)，(ii)は同時に起こらないから，和の法則により，

${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$ が成り立つ。

[[エ] の選択肢]

① $n-r$ 個　　② $n-1$ 個　　③ ある特定の 1 個

[[オ], [カ] の選択肢]

① n 個から $n-r$ 個

② n 個から 1 個

③ 残り $n-1$ 個から $r-1$ 個

④ 残り $n-1$ 個から 1 個

⑤ 残り r 個から $r-1$ 個

⑥ 残り r 個から 1 個

⑦ ある特定の 1 個を除く $n-1$ 個から r 個

⑧ ある特定の 1 個を除く $n-1$ 個から 1 個

7 人を次のように分ける方法は何通りあるか。

3　4 人，2 人，1 人の 3 組に分ける方法

キクケ 通り

4　4 組に分ける方法

コサシ 通り

PART2　同じものを含む順列

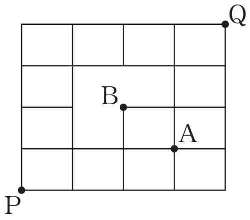
2　[1]　mathematics の 11 文字から 4 文字選んで並べる方法は何通りあるか。

[2]　右の図の P 地点から Q 地点に至る最短経路について次の問いに答えよ。

(1)　A 地点を通る経路は何通りあるか。

(2)　B 地点を通る経路は何通りあるか。

(3)　最短経路は全部で何通りあるか。



Point Pickup

n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，……　がそれぞれ同じものであるとき，これら n 個のものすべてを 1 列に並べる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}\quad \text{ただし}\quad p+q+r+\cdots\cdots=n$$

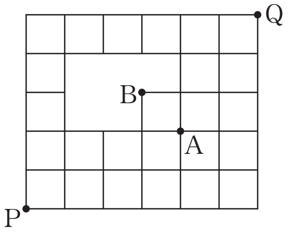
また，この総数の求め方として，1 列に並んだ場所から，同じものを並べる位置を順次決める方法もある。

第 3 講　PART2　確認問題

1 internet の 8 文字から 4 文字選んで並べる方法は何通りあるか。

アイウ 通り

2 右の図の P 地点から Q 地点に至る最短経路について，次の問いに答えよ。



(1) A 地点を通る経路は何通りあるか。

エオカ 通り

(2) B 地点を通る経路は何通りあるか。

キク 通り

(3) 最短経路は全部で何通りあるか。

ケコサ 通り

PART3　重複組合せ

3　[1]　$x+y+z=10$ を満たす整数 x, y, z について，次の問いに答えよ。

(1)　0 以上の整数 x, y, z の組 $(x,\ y,\ z)$ は何組あるか。

(2)　自然数 x, y, z の組 $(x,\ y,\ z)$ は何組あるか。

[2]　a, b, c, d はそれぞれ 1，2，3，4，5 のうちいずれかの数であるとする。次の問いに答えよ。

(1)　$a<b<c<d$ となる組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は何組あるか。

(2)　$a \leqq b \leqq c \leqq d$ となる組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は何組あるか。

Point Pickup

異なる n 個(n 種類)のものから，重複を許して r 個取る組合せを n 個から r 個取る「重複組合せ」という。n 個から r 個取る重複組合せは

　　r 個の○ と ($n-1$) 個の ｜(仕切り) の順列(同じものを含む順列)

として扱うとよい。

第 3 講　PART3　確認問題

1　$x+y+z=8$ を満たす 0 以上の整数 x，y，z の組 (x, y, z) は何組あるか。

[アイ] 組

2　$x+y+z=8$ を満たす自然数 x，y，z の組 (x, y, z) は何組あるか。

[ウエ] 組

a，b，c，d はそれぞれ 1，2，3，4，5，6，7 のうちいずれかの数であるとする。

3　$a<b<c<d$ となる組 (a, b, c, d) は何組あるか。

[オカ] 組

4　$a \leqq b \leqq c \leqq d$ となる組 (a, b, c, d) は何組あるか。

[キクケ] 組

第 4 講　事象と確率

PART1　場合の数と確率

1 りんご 2 個，みかん 3 個，桃 1 個の合計 6 個の果物について，次の問いに答えよ。ただし，同じ果物は区別がつかないものとする。

(1) 6 個の果物から 4 個を選び，1 列に並べる方法は何通りあるか。

(2) 6 個の果物から 4 個を選んで 1 列に並べるとき，りんごが隣り合って並ぶ確率を求めよ。

Point Pickup

全事象 U の根元事象が同様に確からしいとき，事象 A の確率 $P(A)$ は

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

根元事象が同様に確からしいものとするために，同じものでも区別して扱うとよい。

第４講　PART1　確認問題

赤色のカードが３枚，青色のカードが２枚，白色のカードが２枚，合計７枚ある。

1　７枚のカードから４枚選び，１列に並べる方法は何通りあるか。

［アイ］通り

2　７枚のカードから４枚選んで１列に並べるとき，青色のカードが隣り合って並ぶ確率を求めよ。

$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

PART2　和事象の確率・余事象の確率

2　1 から 10 までの数字が書かれた 10 枚のカードが袋に入っている。この袋の中から 3 枚のカードを同時に取り出す。次の確率を求めよ。

(1)　5 のカードを取り出す確率

(2)　カードの数字の最大が 8 以上である確率

(3)　1 または 2 のカードを取り出す確率

Point Pickup

事象 A, B が

互いに排反であるとき　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　(確率の加法定理)

互いに排反でないとき　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

また，余事象の確率　$P(\overline{A})=1-P(A)$　の利用を常に意識しておくとよい。

第 4 講　PART2　確認問題

1 から 12 までの数字が書かれた 12 枚のカードが袋に入っている。
この袋の中から 3 枚のカードを同時に取り出す。

1　6 のカードを取り出す確率を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

2　取り出したカードの数字の最大が 9 以上である確率を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$$

3　3 または 4 のカードを取り出す確率を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

PART3　最大値・最小値の確率

3　3 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　出る目の最小値が 2 以上である確率

(2)　出る目の最小値が 2 以上 4 以下である確率

(3)　出る目の最小値が 2 である確率

(4)　出る目の最小値が 2，最大値が 5 である確率

Point Pickup

複数のさいころの

出る目の「最小値が k 以上」＝出る目が「すべて k 以上」

である。

複数のさいころの出る目について

（最小値が m 以上 n 以下の確率）

＝（最小値が m 以上の確率）－（最小値が $(n+1)$ 以上の確率）

（最小値が m の確率）＝（最小値が m 以上の確率）－（最小値が $(m+1)$ 以上の確率）

第4講　PART3　確認問題

3個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

1　出る目の最小値が3以上である確率

$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$

2　出る目の最小値が3以上5以下である確率

$\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$

3　出る目の最小値が3である確率

$\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケコサ}}$

4　出る目の最小値が3，最大値が5である確率

$\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{スセ}}$

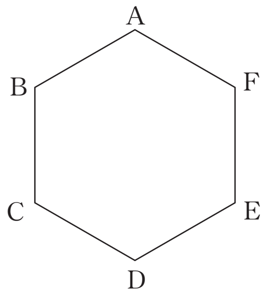
第 5 講　さまざまな試行と確率，期待値

PART1　反復試行の確率

1　右図のような正六角形 ABCDEF において，点 A を出発点として周上の点を移動する点 P がある。1 枚の硬貨を投げて表が出たときは左回りに 3 個，裏が出たときは右回りに 1 個分進む。

(1)　硬貨を 3 回投げて，点 P が点 D にある確率を求めよ。

(2)　硬貨を 6 回投げて，点 P が点 E にある確率を求めよ。

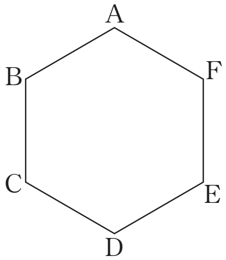


Point Pickup

反復試行により数直線上の点や図形上の頂点を動く動点の問題は，事象が起こる回数を x，y などの文字で表し，移動の向きを考慮した移動量を文字を使って表す。

第5講　PART1　確認問題

右図のような正六角形 ABCDEF において，点 A を出発点として周上の頂点を移動する点 P がある。さいころ 1 個を投げて 3 以上の目が出たときは左回りに頂点 4 個分，2 以下の目が出たときは右回りに頂点 1 個分進む。



1　さいころを 4 回投げて，点 P が点 B にある確率を求めよ。

$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$

2　さいころを 7 回投げて，点 P が点 E にある確率を求めよ。

$\dfrac{\boxed{エオカ}}{\boxed{キクケコ}}$

PART2　条件付き確率

2　[1]　白玉 5 個と赤玉 3 個が入っている袋から，1 個ずつ順に 3 個の玉を取り出す。取り出した 1 番目の玉が赤であるとき，3 番目の玉が白である確率を求めよ。

[2]　A と B の 2 つの袋があって，A には白玉 4 個と赤玉 6 個，B には白玉 5 個と赤玉 5 個が入っている。A から 1 個取り出して B に入れ, よくかきまぜてから 1 個取り出して A に入れるとき，次の確率を求めよ。

(1)　A の白玉の数が増加する確率

(2)　A の白玉の数が減少する確率

(3)　A の白玉の数が変わらない確率

Point Pickup

[1]　事象 A が起こったときに事象 B が起こる確率(条件付き確率)は

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

事象 A が起こったあとの状態が明確なときは，その状態から事象 B が起こる場合を考え，$P_A(B)$ を求めるとよい。

[2]　確率の乗法定理　$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$　を用いる。

第 5 講　PART2　確認問題

1　黒玉６個と白玉４個が入っている箱から，１個ずつ順に３個の玉を取り出す。取り出した１番目の玉が黒であるとき，３番目の玉も黒である確率を求めよ。

$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

2　ＡとＢの２つの箱があって，Ａには黒玉４個と白玉８個，Ｂには黒玉３個と白玉２個が入っている。Ａから１個取り出してＢに入れ，よくかきまぜた後，Ｂから１個取り出してＡに入れるとき，次の確率を求めよ。

⑴　Ａの黒玉の数が増加する確率

$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

⑵　Ａの黒玉の数が減少する確率

$\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$

⑶　Ａの黒玉の数が変わらない確率

$\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$

PART3　期待値

3　2 個のさいころを同時に投げるとき，2 個のさいころの出る目の和の期待値を求めよ。

Point Pickup

変量 X のとりうる値を x_1，x_2，……，x_n とし，X がこれらの値をとる確率をそれぞれ p_1，p_2，……，p_n とすると，X の期待値 E は

$$E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots\cdots + x_n p_n$$

一般に，(和の期待値)＝(期待値の和)　である。

第 5 講　PART3　確認問題

1　さいころを投げて，1 か 2 の目が出ると 2 点，3 か 4 の目が出ると 4 点，5 か 6 の目が出ると 6 点を得る。さいころを 2 回投げるとき，合計点の期待値を求めよ。

ア

第 6 講　三角形の性質

PART1　三角形の内心，角の二等分線の性質

1　AB＝4，BC＝10，CA＝7 である △ABC の内心を I とし，直線 BI と辺 AC の交点を D とする。このとき，次の比を求めよ。

(1)　△BAI：△BCI

(2)　△AIC：△ABC

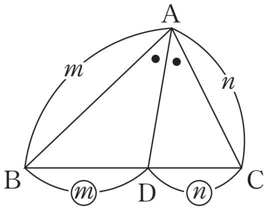
(3)　△CID：△ABC

Point Pickup

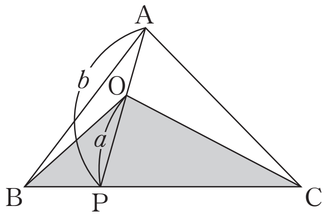
三角形の内心は，3 つの内角の二等分線の交点である。

右図の △ABC において，AD が ∠A の二等分線であるとき

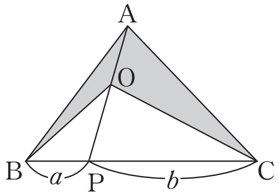
BD：DC＝AB：AC　　（角の二等分線の性質）



三角形の面積と線分の比について，以下のことがいえる。



$$\frac{\triangle \mathrm{OBC}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{AP}}=\frac{a}{b}$$



$$\frac{\triangle \mathrm{OAB}}{\triangle \mathrm{OAC}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{CP}}=\frac{a}{b}$$

第 6 講　PART1　確認問題

1　AB＝4，BC＝8，CA＝9 である △ABC の内心を I とし，直線 BI と辺 AC の交点を D とする。このとき，次の比を求めよ。ただし，最も簡単な整数の比で答えよ。

(1)　△BAI：△BCI ＝ [ア]：[イ]

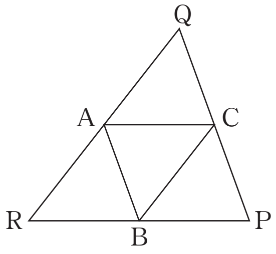
(2)　△AIC：△ABC＝[ウ]：[エ]

(3)　△AID：△ABC＝[オ]：[カ]

PART2　三角形の外心・垂心

2　三角形の各頂点から対辺に下ろした垂線は１点で交わる(これを垂心という)。
このことを，次の方針にしたがって証明せよ。

△ABC の頂点 A, B, C を通り，各頂点の対辺と平行な３つの直線の交点を右図のように P，Q，R とする。
△ABC の頂点 A，B，C からそれぞれの対辺に垂線 AD，BE，CF を下ろしたとき，AD，BE，CF が，△PQR の外心において１点で交わることを証明する。



Point Pickup

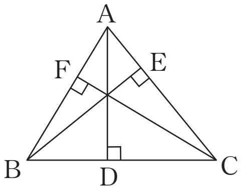
三角形の外心は，３つの辺の垂直二等分線の交点である。
△ABC の３つの頂点から対辺に下ろした垂線が，△PQR の３つの辺の垂直二等分線であることを示せばよい。

第 6 講　PART2　確認問題

1　三角形の3つの頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は1点で交わる(この交点を垂心という)。

このことを(＊)とする。

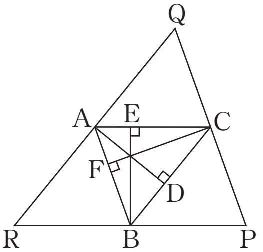
△ABC の頂点 A，B，C から対辺またはその延長に下ろした3本の垂線を AD，BE，CF とし，これらが1点で交わることを示すことにより，(＊)を証明せよ。



選択肢は最も適切なものを選べ。

(証明)

△ABC の頂点 A，B，C を通り，それぞれの対辺に平行な直線の交点を右図のように P, Q, R とする。



四角形 ABCQ は [ア] であるから

AQ＝[イ]

四角形 ACBR は [ア] であるから

[ウ]＝[イ]

ゆえに　AQ＝[ウ]

よって，点 A は [エ] である。

また，AD⊥BC かつ BC∥RQ であるから　AD⊥RQ

よって，AD は [オ] である。

同様に，BE は [カ]，CF は [キ] である。

よって，△ABC の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線 AD，BE，CF は，△PQR の [ク] において1点で交わる。

[ア の選択肢]

① 台形　② 平行四辺形

③ 円に内接する四角形

[イ の選択肢]

① AB　② BC　③ CA

④ CQ　⑤ BQ

[ウ の選択肢]

① AR　② BR　③ BP　④ CP

[エ の選択肢]

① △ABC の外接円と辺 RQ の接点

② 辺 QR と直線 PD の交点

③ 辺 QR の中点

[オ ～ キ の選択肢]

① 辺 PQ の垂直二等分線

② 辺 QR の垂直二等分線

③ 辺 RP の垂直二等分線

④ ∠P の二等分線

⑤ ∠Q の二等分線

⑥ ∠R の二等分線

[ク の選択肢]

① 重心　② 内心　③ 外心

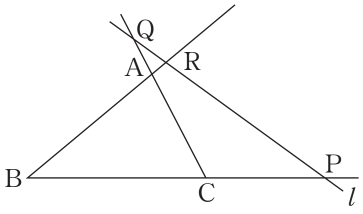
【MEMO】

PART3　チェバの定理・メネラウスの定理

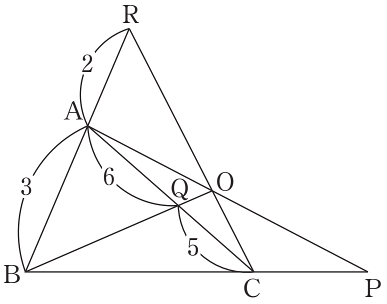
3　(1)　右図の △ABC において，辺 BC，CA，AB の延長と直線 l との交点をそれぞれ P，Q，R とするとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，直線 l は △ABC の頂点を通らない。

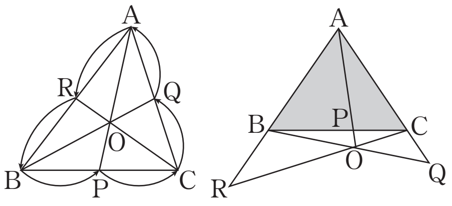


(2)　右図の △ABC の外部に点 O があり，直線 AO，BO，CO がそれぞれ辺 BC，CA，AB またはその延長と交わる点をそれぞれ P，Q，R とする。BA：AR＝3：2，AQ：QC＝6：5 のとき，BQ：QO を求めよ。



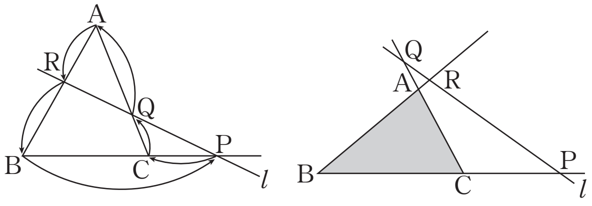
Point Pickup

チェバの定理



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

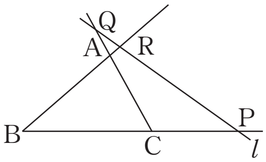
メネラウスの定理



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

第 6 講　PART3　確認問題

1 右図の △ABC において，辺 BC，CA，AB の延長と直線 l との交点をそれぞれ P，Q，R とするとき



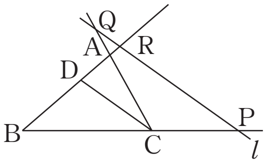
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，直線 l は △ABC の頂点を通らない。

選択肢は最も適切なものを選べ。

（証明）

点 C を通り直線 l に平行な直線を引き，直線 AB との交点を D とすると



PR // CD より　$\dfrac{BP}{PC}=\boxed{\text{ア}}$　……(＊)

RQ // CD より　$\dfrac{CQ}{QA}=\boxed{\text{イ}}$　……(＊＊)

(＊)，(＊＊)の両辺をそれぞれ掛けると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=\boxed{\text{ア}}\cdot\boxed{\text{イ}}$$

この両辺に $\boxed{\text{ウ}}$ を掛けると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\boxed{\text{ウ}}=\boxed{\text{ア}}\cdot\boxed{\text{イ}}\cdot\boxed{\text{ウ}}$$

この右辺は

$$\boxed{\text{ア}}\cdot\boxed{\text{イ}}\cdot\boxed{\text{ウ}}=1$$

であるから

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

[ア の選択肢]

① $\dfrac{BR}{AR}$　② $\dfrac{BC}{BP}$　③ $\dfrac{BA}{DA}$

④ $\dfrac{BD}{RD}$　⑤ $\dfrac{BR}{RD}$

[イ の選択肢]

① $\dfrac{DR}{RA}$　② $\dfrac{RA}{RB}$　③ $\dfrac{RB}{RD}$

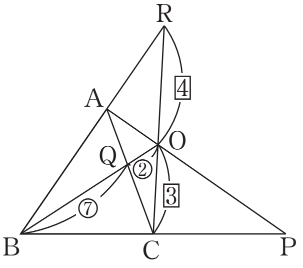
④ $\dfrac{CD}{RP}$　⑤ $\dfrac{CD}{RQ}$

[ウ の選択肢]

① $\dfrac{RA}{AB}$　② $\dfrac{RB}{BA}$　③ $\dfrac{DB}{BC}$

④ $\dfrac{RB}{BC}$　⑤ $\dfrac{AR}{RB}$　⑥ $\dfrac{BR}{RB}$

2 右図のように △ABC の外部に点Ｏがあり，直線 AO, BO, CO がそれぞれ辺 BC, CA, AB およびその延長と交わる点をそれぞれ P, Q, R とする。BQ：QO＝7：2, CO：OR＝3：4 のとき，AQ：QC を求めよ。ただし，最も簡単な整数の比で答えよ。

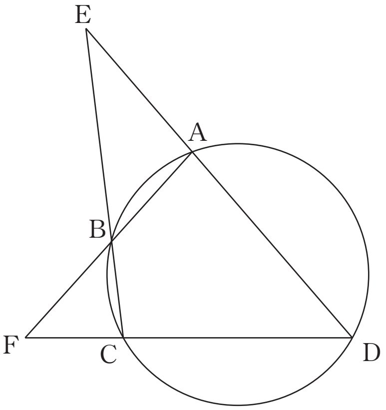


AQ：QC＝ エ ： オ

[MEMO]

第 7 講　円の性質
PART1　方べきの定理

1　円に内接する四角形 ABCD があり，AD = 5，BC = 2 である。また，直線 AD と直線 BC の交点を E，直線 AB と直線 CD の交点を F とすると，AE = 3，CF = 2 である。このとき，次の問いに答えよ。



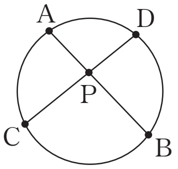
(1)　BE の長さを求めよ。
(2)　CD の長さを求めよ。
(3)　∠E の二等分線と直線 CD との交点を G とし，∠F の二等分線と直線 EG の交点を H，直線 AD との交点を I とするとき，FH : HI を求めよ。

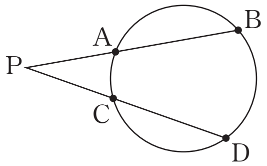
Point Pickup

右図において，方べきの定理

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

が成り立つことは，円周角の定理および円に内接する四角形の性質より，三角形の相似を用いて証明することができる。

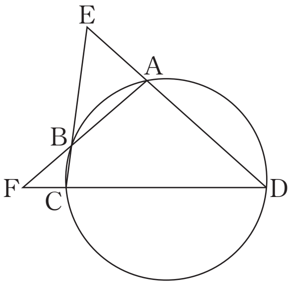




方べきの定理を用いない場合も，相似な三角形に着目するとよい場面がある。

第 7 講　PART1　確認問題

1 円に内接する四角形 ABCD があり，AD＝4，CD＝5 である。また，直線 AD と直線 BC の交点を E，直線 AB と直線 CD の交点を F とすると，AE＝2，BE＝3 である。
このとき，次の問いに答えよ。



(1) BC の長さを求めよ。

BC＝ ア

(2) CF の長さを求めよ。

CF＝ イ

(3) ∠E の二等分線と直線 CD との交点を G とし，∠F の二等分線と直線 EG との交点を H，直線 AD との交点を I とするとき，FI：HI を求めよ。ただし，最も簡単な整数の比で答えよ。

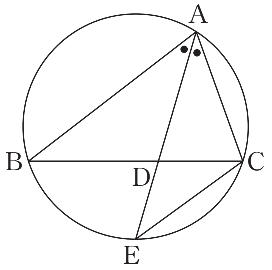
FI：HI＝ ウ ： エ

PART2　方べきの定理，内接四角形の性質

2　(1)　$\triangle$ABC の $\angle$A の二等分線と辺BCとの交点をDとする。このとき

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

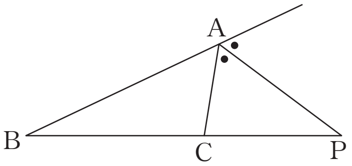
が成り立つことを証明せよ。必要に応じて，$\triangle$ABC の $\angle$A の二等分線が外接円と交わる点をEとすると，$\triangle ABD \backsim \triangle AEC$ であることを用いよ。



(2)　$\triangle$ABC の $\angle$A の外角の二等分線と辺BCの延長との交点をPとする。このとき

$$AP^2 = BP \cdot PC - AB \cdot AC$$

が成り立つことを証明せよ。



Point Pickup

図形の証明問題においては，

- 与えられた図形の性質やそこから導かれること
- 三角形の合同や相似から導かれること

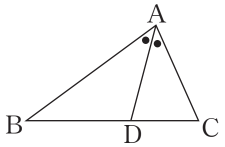
を用いながら，証明したい結論を導く。

第 7 講　PART2　確認問題

1　△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

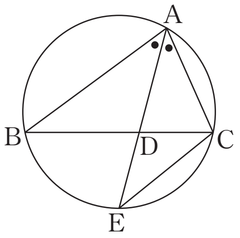
が成り立つことを証明せよ。



選択肢は最も適切なものを選べ。

（証明）

△ABC の外接円と直線 AD の交点のうち，A でないものを E とする。



△ABD と △AEC において

$$\angle BAD = \angle EAC$$

円周角の定理より

$$\angle ABD = \boxed{\text{ア}}$$

よって　△ABD ∽ △AEC

ゆえに　$AB : \boxed{\text{イ}} = AD : AC$

よって　$AD \cdot \boxed{\text{イ}} = AB \cdot AC$　……(＊)

また，方べきの定理より　$DA \cdot \boxed{\text{ウ}} = DB \cdot DC$

よって　$AD \cdot \boxed{\text{ウ}} = BD \cdot CD$　……(＊＊)

(＊)－(＊＊)より

$$AD \cdot \boxed{\text{イ}} - AD \cdot \boxed{\text{ウ}} = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

$$AD \cdot \boxed{\text{エ}} = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

ゆえに　$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

[ア の選択肢]

① $\angle$ACD　② $\angle$ADC

③ $\angle$AEC　④ $\angle$ECD

[イ ~ エ の選択肢]

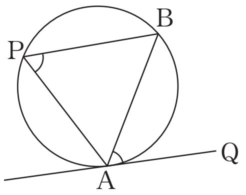
① AC　② AD　③ AE

④ BD　⑤ EC　⑥ DE

【MEMO】

PART3　接弦定理とその逆

3 (1) 直線 AB に対して，点 P と点 Q が反対側にある。このとき，$\angle BAQ = \angle APB$ ならば，直線 AQ は $\triangle ABP$ の外接円と接することを証明せよ。



(2) 四角形 ABCD において，2 本の対角線 AC と BD が点 P で直交し，$AB \parallel DC$ であるとする。このとき，$\triangle PAB$ と $\triangle PCD$ のそれぞれの外接円は互いに外接することを証明せよ。

Point Pickup

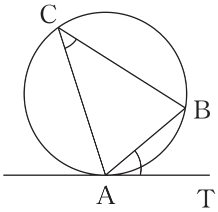
右図において次が成り立つ。

・直線 AT が点 A で円に接しているとき

$\angle BAT = \angle ACB$　（接弦定理）

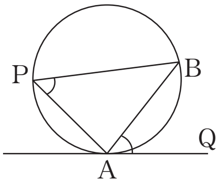
・$\angle BAT = \angle ACB$ のとき

直線 AT は点 A で円に接する　（接弦定理の逆）

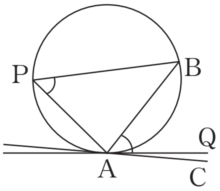


第 7 講　PART3　確認問題

1 直線 AB に対して, 点 P と点 Q が反対側にある。このとき, ∠BAQ＝∠APB ならば, 直線 AQ は △ABP の外接円と接することを証明せよ。
選択肢は最も適切なものを選べ。



(証明)
△ABP の外接円の点 A における接線上に，右図のように点 C をとると，接弦定理より [ア] ＝∠APB



仮定より　∠BAQ＝∠APB

よって　[ア] ＝∠BAQ

点 Q は直線 AB に対して点 P と反対側にある点であるから，[イ] にある。よって，直線 AQ は △ABP の外接円と接する。

[[ア] の選択肢]

① ∠ABP　② ∠BAP
③ ∠BAC　④ ∠BAQ

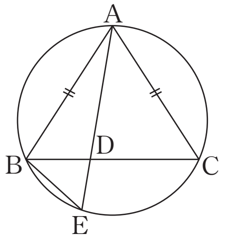
[[イ] の選択肢]

① 3 点 A，C，Q は同一直線上
② 3 点 P，C，Q は同一直線上
③ 4 点 A，C，B，P は同一円周上
④ 4 点 A，Q，B，P は同一円周上

2 △ABC の辺 BC 上に点 D をとり，△ABC の外接円と直線 AD の交点のうち，A でないものを E とする。AB＝AC のとき，直線 AB は 3 点 B，D，E を通る円と接することを証明せよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

（証明）



△ABC は AB＝AC の二等辺三角形であるから

ウ ＝∠ACB

円周角の定理より

∠ACB＝ **エ**

よって

ウ ＝ エ

したがって，**オ** より，直線 AB は，3 点 B，D，E を通る円と接する。

[**ウ** の選択肢]

① ∠ABC　② ∠ADB

③ ∠ADC　④ ∠BAC

[**エ** の選択肢]

① ∠ADB　② ∠ADC　③ ∠AEB

④ ∠CAE　⑤ ∠CBE

[**オ** の選択肢]

① 円周角の定理　② 円周角の定理の逆

③ 方べきの定理　④ 方べきの定理の逆

⑤ 接弦定理　⑥ 接弦定理の逆

[MEMO]

第 8 講　約数と倍数

PART1　最小公倍数と最大公約数

1　$a<b<c$ を満たす 3 つの自然数 a，b，c がある。次の(i)，(ii)，(iii)を同時に満たす a，b，c をすべて求めよ。

(i)　a，b，c の最大公約数は 45

(ii)　b と c の最大公約数は 225，最小公倍数は 1350

(iii)　a と b の最小公倍数は 3150

Point Pickup

2 つの自然数 a，b の最大公約数を G とすると

$$a=a'G,\ b=b'G\quad (a' \text{ と } b' \text{ は互いに素})$$

と表される。このとき，a，b の最小公倍数を L とすると

$$L=a'b'G$$

と表される。よって，$ab=GL$ である。

第8講　PART1　確認問題

1 $a<b<c$ を満たす3つの自然数 a, b, c がある。次の(i), (ii), (iii)を同時に満たす a, b, c の組をすべて求めよ。

(i) a, b, c の最大公約数は24

(ii) b と c の最大公約数は72, 最小公倍数は1080

(iii) a と b の最小公倍数は1512

$(a, b, c)=($ アイウ , エオカ , キクケ $)$

PART2　余りによる分類，合同式

2　n を整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　n^2+7n+4 は偶数である。

(2)　n^2+1 は3の倍数ではない。

Point Pickup

k を整数とするとき，すべての整数は，正の整数 m で割ったときの余りで

mk，$mk+1$，$mk+2$，……，$mk+(m-1)$

の m 通りに分類できる。

a，b を整数，m を自然数とするとき，$a-b$ が m の倍数である，すなわち a を m で割った余りと b を m で割った余りが等しいことを，a と b は m を「法」として「合同」であるといい

$a \equiv b \pmod{m}$

と表す。このような式を「合同式」という。

$a \equiv b \pmod{m}$，$c \equiv d \pmod{m}$　(a，b，c，d を整数，m を自然数)とするとき

$a+c \equiv b+d \pmod{m}$　　$a-c \equiv b-d \pmod{m}$

$ac \equiv bd \pmod{m}$　　$a^n \equiv b^n \pmod{m}$　ただし，n は自然数

第 8 講　PART2　確認問題

n を整数とする。次のことを証明せよ。

空欄には最も適切な値を答えよ。

1　$3n^2+9n+5$ は奇数である。

(証明)

すべての整数 n は，$\boxed{ア}k$，$\boxed{ア}k+\boxed{イ}$ (k は整数)の

いずれかで表される。

$n=\boxed{ア}k$ のとき

$$3n^2+9n+5=\boxed{ウ}\left(\boxed{エ}k^2+9k+\boxed{オ}\right)+\boxed{カ}$$

$n=\boxed{ア}k+\boxed{イ}$ のとき

$$3n^2+9n+5=\boxed{キ}\left(\boxed{ク}k^2+15k+\boxed{ケ}\right)+\boxed{コ}$$

よって，$3n^2+9n+5$ は奇数である。

2 $2n^2+n+1$ は３の倍数ではない。

（証明）

すべての整数 n は，$\boxed{サ}k$，$\boxed{サ}k+\boxed{シ}$，$\boxed{サ}k+\boxed{ス}$

（k は整数）のいずれかで表される。ただし，$\boxed{シ}<\boxed{ス}$

とする。

$n=\boxed{サ}k$ のとき

$$2n^2+n+1=\boxed{セ}\left(\boxed{ソ}k^2+k\right)+\boxed{タ}$$

$n=\boxed{サ}k+\boxed{シ}$ のとき

$$2n^2+n+1=\boxed{セ}\left(\boxed{ソ}k^2+5k+\boxed{チ}\right)+\boxed{ツ}$$

$n=\boxed{サ}k+\boxed{ス}$ のとき

$$2n^2+n+1=\boxed{セ}\left(\boxed{ソ}k^2+9k+\boxed{テ}\right)+\boxed{ト}$$

よって，$2n^2+n+1$ は３の倍数ではない。

[MEMO]

PART3　ピタゴラス数

3　a，b，c を整数とし，$a^2+b^2=c^2$ とする。次のことを証明せよ。

(1)　a^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 である。

(2)　a，b のうち，少なくとも 1 つは 3 の倍数である。

(3)　a^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

(4)　a，b，c が互いに素であるとき，c は奇数である。

Point Pickup

倍数の性質に関する証明問題は，余りによる分類（剰余類）が効果的である。

$a^2+b^2=c^2$ を満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ を，ピタゴラス数という。

第 8 講　PART3　確認問題

1　n を整数とする。また，整数 a，b，c は $a^2+b^2=c^2$ を満たすとする。このとき，次のことを証明せよ。空欄には最も適切な値を答え，選択肢は最も適切なものを選べ。

(1)　n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

(2)　a と b のうち少なくとも 1 つは偶数である。

(3)　a が偶数，b が奇数のとき，a は 4 の倍数である。

(証明)

(1)　すべての整数 n は，［ア］k，［ア］$k+$［イ］(k は整数) のいずれかで表される。

$n=$［ア］k のとき

$n^2=$［ウ］k^2

$n=$［ア］$k+$［イ］のとき

$n^2=$［ウ］$(k^2+k)+$［エ］

よって，n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

(2)　［オ］と仮定する。

このとき，(1)より a^2，b^2 はともに 4 で割った余りが［カ］であるから，a^2+b^2 を 4 で割った余りは［キ］である。また(1)より，c^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

よって，［ク］ことに矛盾するから，［オ］ことはない。

したがって，a，b のうち少なくとも 1 つは偶数である。

(3)　$a=2l$，$b=2m+1$ (l，m は整数)とおくと

$$c^2=(2l)^2+(2m+1)^2$$
$$=4\left(l^2+m^2+m\right)+1 \quad \cdots\cdots(*)$$

であるから，(1)より c は [ケ] である。

$c=2j+1$ (j は整数)とおくと，(＊)より

$$(2j+1)^2=4\left(l^2+m^2+m\right)+1$$

よって　$l^2=j(j+1)-m(m+1)$

$j(j+1)$ と $m(m+1)$ は，ともに連続する2整数の積

であるから [コ] である。ゆえに，l^2 は [コ] である。

(偶数)^2＝偶数，(奇数)^2＝奇数 であるから，l も [コ]

である。

ゆえに，$2l$ は4の倍数である。

したがって，$a=2l$ より，a は4の倍数である。

[[オ] の選択肢]

① a は奇数，b は偶数である

② a，b がともに奇数である

③ a，b のうち，少なくとも1つは奇数である

[[ク] の選択肢]

① a，b，c が整数である

② $a^2+b^2=c^2$ である

③ c が奇数である

④ c が偶数である

[[ケ]，[コ] の選択肢]

① 奇数　　　② 偶数

[MEMO]

第 9 講　ユークリッドの互除法，整数の性質の活用

PART1　不定方程式(2 元 1 次)

1　次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$5x-2y=25$

(2)　$24x+19y=7$

Point Pickup

1 次不定方程式 $ax+by=c$ (a，b は互いに素) の整数解は

$a\times(x$ の式$)=b\times(y$ の式$)$ ……①

と変形し，$(x$ の式$)=b$ の倍数　とすることで求めることができる。

①の式に変形する方法の 1 つとして，方程式を満たす 1 組の解(特殊解)を見つけ，その解を方程式に代入した式と，もとの方程式との差をとる方法がある。

特殊解を見つけることが困難な場合は，ユークリッドの互除法を用いる方法がある。

第9講　PART1　確認問題

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

1　$3x-4y=21$

k を整数とすると，整数解は

$x=$ **ア** $k+$ **イ**，　$y=$ **ウ** k

2　$37x+32y=4$

k を整数とすると，整数解は

$x=$ **エオ** $k+$ **カキ**，

$y=$ **クケコ** $k-$ **サシ**

ただし，カキ は30以上60以下の値とする。

PART2　いろいろな不定方程式

2　［１］　$4x+2y+z=15$ を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

［２］　(1)　$xy-3x-7y+15=0$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

(2)　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4$ を因数分解せよ。また，その結果を用いて，$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$ を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

Point Pickup

［１］　ある文字について式を整理し，他の文字の取り得る値の範囲が１以上であることに注目して，ある文字に関する不等式を立て，値を絞り込む。

［２］　因数分解を用いて，

(　　　)×(　　　)＝(整数)

の形に変形し，正負，偶奇，大小に注目して値を絞り込む。

第 9 講　PART2　確認問題

1　$6x+5y+3z=28$ を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

$(x,\ y,\ z)=($ ア ， イ ， ウ $)$，

$($ エ ， オ ， カ $)$

ただし，ア ＜ エ とする。

2　$xy-5x-2y+6=0$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

$(x,\ y)=($ キ ， ク $)$，$($ ケ ， コ $)$，

$($ サ ， シ $)$，$($ ス ， セ $)$

ただし，キ ＜ ケ ＜ サ ＜ ス とする。

3　次の問いに答えよ。

(1)　$x^2+xy-6y^2+x+8y-2$ を因数分解せよ。

$x^2+xy-6y^2+x+8y-2$

$=(x+$ ソ $y-$ タ $)(x-$ チ $y+$ ツ $)$

(2)　(1)の結果を用いて，

$$x^2+xy-6y^2+x+8y-20=0$$

を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

$(x,\ y)=($ テ ， ト $)$，$($ ナ ， ニ $)$

ただし，テ ＜ ナ とする。

PART3　n 進数

3　(1)　3 進法で表すと 6 桁になるような自然数 N は何個あるか。

(2)　自然数 N を 5 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(5)}$ となり，7 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(7)}$ となる。a，b，c を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

Point Pickup

・n 進法で表したとき，m 桁となる自然数 N は $n^{m-1} \leqq N < n^m$ と表される。

・n_1 進法と n_2 進法の比較は，それぞれ 10 進法で表してから行うとよい。

第 9 講　PART3　確認問題

1　5 進法で表すと 5 桁になるような自然数 N は何個あるか。

[アイウエ] 個

2　自然数 N を 6 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(6)}$ となり，9 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(9)}$ となる。a，b，c の値を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

$a=$ [オ]，$b=$ [カ]，$c=$ [キ]，

$N=$ [クケコ]

テキスト　解答

第 1 講　場合の数

PART1　集合の要素と個数

1　1から100までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ。

(1)　2でも3でも割り切れない整数

(2)　2でも3でも5でも割り切れない整数

1から100までの整数全体の集合を U とし，U の部分集合のうち，2の倍数全体の集合を A，3の倍数全体の集合を B，5の倍数全体の集合を C とすると

$n(U)=100$

$A=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 2\cdot50\}$　より　$n(A)=50$

$B=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33\}$　より　$n(B)=33$

$C=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$　より　$n(C)=20$

また，$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$，$A\cap B\cap C$ は，それぞれ6の倍数，15の倍数，10の倍数，30の倍数全体の集合であるから

$A\cap B=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot16\}$　より　$n(A\cap B)=16$

$B\cap C=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot6\}$　より　$n(B\cap C)=6$

$C\cap A=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 10\cdot10\}$　より　$n(C\cap A)=10$

$A\cap B\cap C=\{30\cdot1,\ 30\cdot2,\ 30\cdot3\}$　より　$n(A\cap B\cap C)=3$

(1)　2でも3でも割り切れない整数全体の集合は　$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$　である。

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=50+33-16=67$$

であるから，求める整数の個数は

$$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=100-67=33$$

(2)　2でも3でも5でも割り切れない整数全体の集合は　$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$　である。

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

$$=50+33+20-16-6-10+3=74$$

であるから，求める整数の個数は

$$n(\overline{A\cup B\cup C})=n(U)-n(A\cup B\cup C)=100-74=26$$

PART2　和の法則と積の法則

2 ［1］ $x+y \leqq 4$ を満たす正の整数 x，y の組はいくつあるか。

［2］ (1) $(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ の展開式における異なる項は何個あるか。

(2) 360 の正の約数の個数と，その総和を求めよ。

［1］ $x+y \leqq 4$ を満たす正の整数 x，y の組は以下の 6 組。

$$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$

（別解）

$x+y \leqq 4$ となるのは，次の(i)~(iii)の場合。

(i) $x+y=2$　　(ii) $x+y=3$　　(iii) $x+y=4$

(i)のとき　$(x,\ y)=(1,\ 1)$ の 1 通り

(ii)のとき　$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ の 2 通り

(iii)のとき　$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$ の 3 通り

(i)，(ii)，(iii)のどの 2 つも同時に起こらないから，求める組は　$1+2+3=6$（組）

［2］ (1) $(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ の展開式における項は

$(a, b$ のいずれか 1 つ$)\times(c, d, e$ のいずれか 1 つ$)\times(f, g, h, i$ のいずれか 1 つ$)$

の形である。よって，異なる項の個数は　$2\times3\times4=24$（個）

(2) $360=2^3\cdot3^2\cdot5$ より，360 の正の約数は

$(2^3$ の正の約数の 1 つ$)\times(3^2$ の正の約数の 1 つ$)\times(5$ の正の約数の 1 つ$)$

の形で表される。

2^3 の正の約数は 1，2，2^2，2^3 の 4 個

3^2 の正の約数は 1，3，3^2 の 3 個

5 の正の約数は 1，5 の 2 個

よって，正の約数の個数は　$4\times3\times2=24$（個）

また，360 の正の約数 24 個は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)$$

を展開した項として現れる。よって，求める総和は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=15\cdot13\cdot6=1170$$

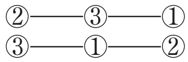
PART3　完全順列

> **3**　n 冊の異なる本が, それぞれ対応するブックケースに１冊ずつ入っている。次の(1)~(3)において，本をブックケースから取り出したあと，すべて間違ったブックケースに入れる方法は，何通りあるか。ただし，ブックケースはすべて異なるとする。
>
> (1)　$n=3$ のとき
>
> (2)　$n=4$ のとき
>
> (3)　$n=5$ のとき

n 冊の本を①，②，……，ⓝとする。求める場合の数は，n 冊の本を１列に並べた順列のうち，すべてのⓚについて k 番目がⓚでないものの総数(k は $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数)である。

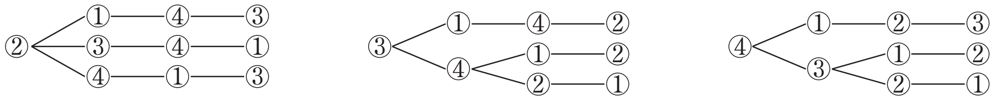
(1)　$n=3$ のとき，条件を満たす順列は右図。

よって，２通り。



(2)　$n=4$ のとき，条件を満たす順列は下図。

よって，９通り。



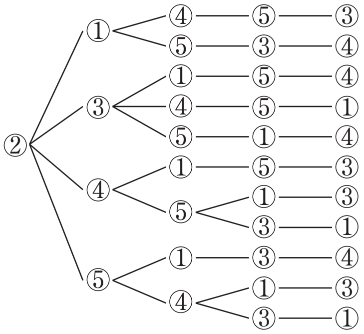
(3)　$n=5$ のとき

１番目が②のとき，条件を満たす順列は右図の 11 通り。

１番目が③，④，⑤のときも同様に 11 通りずつある。

したがって，求める場合の数は

$$11 \times 4 = 44 \text{（通り）}$$



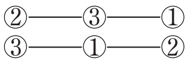
(別解)

n 冊の本を１列に並べた順列のうち，すべての k について k 番目がⓚでないものの総数(k は $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数)を $W(n)$ とする。

たとえば，$n=2$ のとき，②−① の１通りのみ。よって　$W(2)=1$

(1)　$n=3$ のとき，右図より２通り。

よって　$W(3)=2$



(2)　$n=4$ のとき，①が２番目のときを考える。

(i)　②が１番目のとき

③，④と３番目，４番目について，③が３番目以外，④が４番目以外であるから，その総数は $W(2)$

②——①——④——③

(ii)　②が１番目以外のとき

②，③，④と１番目，３番目，４番目について，②が１番目以外，③が３番目以外，④が４番目以外であるから，その総数は $W(3)$

③——①——④——②
④——①——②——③

(i), (ii)より，①が２番目のときの場合の数は

$$W(2)+W(3)=1+2=3$$

①が３番目，４番目のときも同様である。

したがって，求める場合の数は　$W(4)=3\times3=9$（通り）

(3)　$n=5$ のとき，①が２番目のときを考える。

(i)　②が１番目のとき

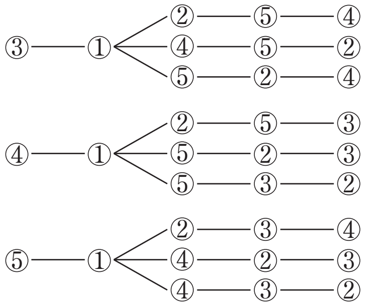
③，④，⑤と３番目，４番目，５番目について，③が３番目以外，④が４番目以外，⑤が５番目以外であるから，その総数は $W(3)$

②——①——○——○——○

(ii)　②が１番目以外のとき

②，③，④，⑤と１番目，３番目，４番目，５番目について，②が１番目以外，③が３番目以外，④が４番目以外，⑤が５番目以外であるから，その総数は $W(4)$

○——①——○——○——○



(i), (ii)より，①が２番目のときの場合の数は

$$W(3)+W(4)=2+9=11$$

①が３番目，４番目，５番目のときも同様である。

したがって，求める場合の数は

$$W(5)=11\times4=44 \text{（通り）}$$

第 2 講　順列

PART1　順列

1　[1]　父母と子供 3 人が 1 列に並ぶとき，次の問いに答えよ。

(1)　父母が両端にくる場合は何通りあるか。

(2)　父母の間に子供が 2 人以上入る場合は何通りあるか。

[2]　6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数をつくる。このとき，次のものは何個できるか。

(1)　3 の倍数　　(2)　324 より小さい整数

[1]　(1)　両端の父母の並び方は　$2!$ 通り

そのそれぞれに対して，子供 3 人の並び方は　$3!$ 通り

よって，求める並び方の総数は　$2!\times3!=2\times6=12$（通り）

(2)　父母の間に子供が 3 人入るとき，(1)より 12 通り

父母の間に子供が 2 人のみ入るとき

父母の並び方は　$2!$ 通り

父母の間に入る子供 2 人の並び方は　${}_3P_2$ 通り

父母とその間に入る子供 2 人の 4 人を 1 組と考えると，その 1 組と残り 1 人の並び方は　$2!$ 通り

よって，並び方の総数は　$2!\times{}_3P_2\times2!=2\times6\times2=24$（通り）

以上より，求める並び方の総数は　$12+24=36$（通り）

(別解)

父母と子供 3 人の 5 人の並び方の総数は　$5!=120$（通り）

このうち，父母の間に子供が 2 人以上入らないのは以下の(i)，(ii)のとき

(i)　父母が隣り合うとき　　(ii)　父母の間に子供が 1 人のみ入るとき

(i)のとき

父母の並び方は　$2!$ 通り

父母を 1 組として考えると，その 1 組と残り 3 人の並び方は　$4!$ 通り

よって，並び方の総数は　$2!\times4!=2\times24=48$（通り）

(ii)のとき

父母の並び方は　2! 通り

父母の間に入る子供 1 人の選び方は　3 通り

父母とその間に入る子供 1 人の 3 人を 1 組と考えると，その 1 組と残り 2 人の並び方は　3! 通り

よって，並び方の総数は　$2!\times3\times3!=2\times3\times6=36$（通り）

以上より，求める並び方の総数は　$120-(48+36)=36$（通り）

[2]　(1)　3 の倍数となるのは，各位の数の和が 3 の倍数となるときである。

その 3 つの数の組合せは

(0，1，2)，(0，1，5)，(0，2，4)，(0，4，5)，

(1，2，3)，(1，3，5)，(2，3，4)，(3，4，5)

の 8 通りである。このうち

0 を含むもの(4 組)

百の位は 0 以外の数であるから，できる整数の個数は　$2\times2!=4$（個）

0 を含まないもの(4 組)

できる整数の個数は　$3!=6$（個）

したがって，求める整数の個数は　$4\times4+6\times4=40$（個）

(2)　百の位が 1 または 2 のとき

十，一の位は残り 5 つの数から 2 つ取る順列で　${}_5P_2$ 通り

よって，できる整数の個数は　$2\times{}_5P_2=2\times20=40$（個）

百の位が 3，十の位が 0 または 1 のとき

一の位は残り 4 つの数から 1 つ選ぶ 4 通り

よって，できる整数の個数は　$2\times4=8$（個）

百の位が 3，十の位が 2 のとき

一の位は 0 または 1 の 2 通り

よって，できる整数の個数は　2 個

以上より，求める整数の個数は　$40+8+2=50$（個）

PART2　円順列・じゅず順列

2　立方体の各面を塗り分ける。次のような塗り分け方は何通りあるか。ただし，隣り合った面は異なるように塗り，立方体を回転させて一致するものは同じ塗り方とする。

(1)　赤，青を含む６色をすべて使い，赤の向かい側の面が青になるように塗る。

(2)　異なる６色をすべて使って塗り分ける

(3)　異なる５色をすべて使って塗り分ける

(1)　ある面を赤で塗り，それを上面とすると，下面は青である。

側面の塗り方は，異なる４個の円順列であるから，求める塗り方は

$$(4-1)!=3!=6 \text{（通り）}$$

(2)　ある色で塗った面を上面とする。

このとき，その対面である下面を塗る色の選び方は５通り。

このそれぞれに対して，側面の塗り方は，異なる４個の円順列で

$$(4-1)!=3!=6 \text{（通り）}$$

よって，求める塗り方は　$5\times6=30$（通り）

(3)　異なる５色をすべて使って６面を塗るので，２つの面が同じ色となる。

また，隣り合った面は異なるように塗ることから，同じ色はある面とその対面に塗ることとなる。

同じ色を塗る面を上面と下面とすると，この２面を塗る色の選び方が５通り。

このとき，側面の塗り方は，異なる４個の円順列において，上下をひっくり返すと一致するものが２つずつあることから

$$\frac{(4-1)!}{2}=\frac{3!}{2}=3 \text{（通り）}$$

よって，求める塗り方は　$5\times3=15$（通り）

PART3　重複順列

3　6 個の異なる球がある。

(1)　6 個の球を A，B の 2 つの箱に，空箱ができないように分ける方法は何通りあるか。

(2)　6 個の球を 2 組に分ける方法は何通りあるか。

(3)　6 個の球を A，B，C の 3 つの箱に，空箱ができないように分ける方法は何通りあるか。

(1)　6 個の球をそれぞれ A，B のどちらかに入れる方法が　$2^6=64$（通り）

このうち，空箱ができるのは，すべての球を A，B の一方だけに入れる場合で 2 通り

よって，求める分け方は　$64-2=62$（通り）

(2)　(1)において A，B の区別をなくして　$62\div 2!=31$（通り）

(3)　6 個の球をそれぞれ A，B，C のいずれかに入れる方法が　3^6 通り

このうち，空箱ができるのは，以下の場合

・空箱が 2 箱のとき，すなわちすべての球を A，B，C のいずれか 1 つだけに入れる場合
　3 通り

・空箱が 1 箱のとき，すなわちすべての球を 2 箱のみに入れる場合
　空箱の選び方が 3 通り
　残り 2 箱に，空箱ができないように入れる方法が，(1)より 62 通り
　よって，3×62 通り

よって，求める分け方は　$3^6-3-3\times 62=729-3-186=540$（通り）

第 3 講　組合せ

PART1　組合せ

1　[1]　次が成り立つことを証明せよ。

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} \quad (0 \leqq r \leqq n)$$

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r \quad (1 \leqq r \leqq n-1,\ n \geqq 2)$$

[2]　8 人を次のように分ける方法は何通りあるか。

(1)　4 人，3 人，1 人の 3 組に分ける

(2)　4 組に分ける

[1]　異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶことは，n 個のものから残す $(n-r)$ 個を決めることと同じである。したがって

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$$

が成り立つ。

異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶことは，次の 2 つの場合に分けられる。

(i)　ある特定の 1 個を選ぶ場合　　(ii)　ある特定の 1 個を選ばない場合

(i)は，残り $(n-1)$ 個から $(r-1)$ 個選ぶ場合で　${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

(ii)は，特定の 1 個を除く $(n-1)$ 個から r 個選ぶ場合で　${}_{n-1}\mathrm{C}_r$

(i)，(ii)は同時に起こらないので，和の法則により

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$$

が成り立つ。

[2]　(1)　8 人から 4 人を選び，残った 4 人から 3 人選ぶと，残りの 1 人は自動的に決まる。

よって，分け方の総数は

$${}_8\mathrm{C}_4 \times {}_4\mathrm{C}_3 = 70 \times 4 = 280 \text{（通り）}$$

(2)　4 組に入る人数をそれぞれ a 人，b 人，c 人，d 人$(a \leqq b \leqq c \leqq d)$とし，$(a,\ b,\ c,\ d)$ のように表すと

$$(1,\ 1,\ 1,\ 5),\ (1,\ 1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 1,\ 3,\ 3),\ (1,\ 2,\ 2,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2,\ 2)$$

の場合がある。

(1, 1, 1, 5) のとき $\dfrac{{}_8C_1\times{}_7C_1\times{}_6C_1}{3!}=56$ (通り)

(1, 1, 2, 4) のとき $\dfrac{{}_8C_1\times{}_7C_1\times{}_6C_2}{2!}=420$ (通り)

(1, 1, 3, 3) のとき $\dfrac{{}_8C_1\times{}_7C_1\times{}_6C_3}{2!2!}=280$ (通り)

(1, 2, 2, 3) のとき $\dfrac{{}_8C_1\times{}_7C_2\times{}_5C_2}{2!}=840$ (通り)

(2, 2, 2, 2) のとき $\dfrac{{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2}{4!}=105$ (通り)

以上より，分け方の総数は $56+420+280+840+105=1701$ (通り)

PART2　同じものを含む順列

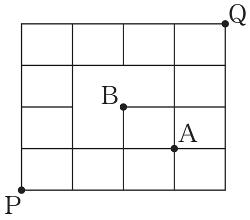
2　［1］　mathematics の 11 文字から 4 文字選んで並べる方法は何通りあるか。

［2］　右の図の P 地点から Q 地点に至る最短経路について次の問いに答えよ。

(1)　A 地点を通る経路は何通りあるか。

(2)　B 地点を通る経路は何通りあるか。

(3)　最短経路は全部で何通りあるか。



［1］　mathematics の 11 文字には，m，a，t が 2 個ずつ，h，e，i，c，s が 1 個ずつ含まれている。選ぶ 4 文字について，以下の場合がある。

(i)　同じ文字 2 個を 2 組含む場合

使う文字の種類は m，a，t から 2 種類選ぶ方法で　${}_3C_2=3$（通り）

選んだ文字に対する順列の総数は　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$（通り）

よって，この場合の総数は　$3\times6=18$（通り）

(ii)　同じ文字 2 個を 1 組のみ含む場合

使う文字の種類は，m，a，t から 1 種類選び，それを 2 個使う文字とし，m，a，t のうち選ばなかった 2 種類と h，e，i，c，s の 5 種類の計 7 種類から 2 種類選ぶ方法で

$${}_3C_1\times{}_7C_2=3\times21=63\ （通り）$$

選んだ文字に対する順列の総数は　$\dfrac{4!}{2!}=12$（通り）

よって，この場合の総数は　$63\times12=756$（通り）

(iii)　すべて異なる文字の場合

m，a，t，h，e，i，c，s の 8 種類から 4 種類選んで並べる方法で

$${}_8P_4=1680\ （通り）$$

(i)～(iii)より，求める順列の総数は　$18+756+1680=2454$（通り）

［２］　右へ１区画進むことを→，上へ１区画進むことを↑と表す。

(1)　P から A までの最短経路は→３個，↑１個の順列で表され，A から Q までの最短経路は→１個，↑３個の順列で表される。

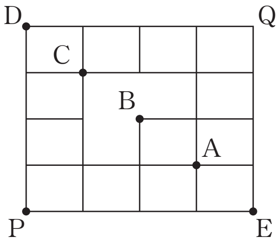
よって，求める経路の総数は　$\dfrac{4!}{3!1!}\times\dfrac{4!}{1!3!}=4\times4=16$（通り）

(2)　P から B まで，B から Q までの最短経路はそれぞれ

$\dfrac{3!}{2!1!}\times1=3$（通り），$1\times\dfrac{3!}{1!2!}=3$（通り）

よって，求める経路の総数は　$3\times3=9$（通り）

(3)　右図のように点 C，D，E を定めると，P から Q までの最短経路は，A，B，C，D，E 地点それぞれいずれかを通る場合に分けられる。



C 地点を通る経路は　$\dfrac{4!}{1!3!}\times\dfrac{4!}{3!1!}=4\times4=16$（通り）

D 地点を通る経路は　$1\times1=1$（通り）

E 地点を通る経路は　$1\times1=1$（通り）

よって，求める経路の総数は　$16+9+16+1+1=43$（通り）

PART3　重複組合せ

3　[1]　$x+y+z=10$ を満たす整数 x，y，z について，次の問いに答えよ。

(1)　0以上の整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ は何組あるか。

(2)　自然数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ は何組あるか。

[2]　a，b，c，d はそれぞれ1，2，3，4，5のうちいずれかの数であるとする。次の問いに答えよ。

(1)　$a<b<c<d$ となる組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は何組あるか。

(2)　$a\leqq b\leqq c\leqq d$ となる組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は何組あるか。

[1]　(1)　10個の○と2本の｜(仕切り)を並べ，｜で区切られた3カ所にある○の個数を左から順に整数 x，y，z の値とすればよい。

よって，求める組数は　$\dfrac{12!}{10!2!}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$ (組)

(2)　$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とすると

$$x+y+z=10 \iff (X+1)+(Y+1)+(Z+1)=10 \iff X+Y+Z=7$$

$$x\geqq 1,\ y\geqq 1,\ z\geqq 1 \iff X+1\geqq 1,\ Y+1\geqq 1,\ Z+1\geqq 1$$

$$\iff X\geqq 0,\ Y\geqq 0,\ Z\geqq 0$$

よって，求める組数は，7個の○と2本の｜の順列の総数であるから

$$\frac{9!}{7!2!}={}_9\mathrm{C}_2=36\ (組)$$

(別解)

10個の○の間9カ所のうち，いずれか2カ所に｜を1本ずつ入れ，区切られた3カ所にある○の個数を左から順に自然数 x，y，z の値とすればよい。

よって，求める組数は　${}_9\mathrm{C}_2=36$ (組)

[2]　(1)　1，2，3，4，5の5個の数から異なる4個を選び，それを小さい順に a，b，c，d とすればよい。よって，求める組数は　${}_5\mathrm{C}_4=5$ (組)

(2)　1，2，3，4，5の5個の数から重複を許して4個を選び，それを小さい順に a，b，c，d とすればよい。よって，求める組数は，4個の○と4本の｜(仕切り)の順列の総数で

$$\frac{8!}{4!4!}={}_8\mathrm{C}_4=70\ (組)$$

（別解）

整数 a，b，c，d において

$$a \leqq b \leqq c \leqq d \iff a < b+1 < c+2 < d+3$$

$a=A$，$b+1=B$，$c+2=C$，$d+3=D$ とおくと

$$1 \leqq A < B < C < D \leqq 8,\ A \geqq 1,\ B \geqq 1,\ C \geqq 1,\ D \geqq 1$$

これを満たす$(A,\ B,\ C,\ D)$の組数は，１～８の８個の数から異なる４個を選び，それを小さい順に A，B，C，D とすればよいから　${}_8C_4=70$（組）

求める$(a,\ b,\ c,\ d)$の組数は，$(A,\ B,\ C,\ D)$の組数と等しいから　70 組

第 4 講　事象と確率

PART1　場合の数と確率

1 りんご 2 個，みかん 3 個，桃 1 個の合計 6 個の果物について，次の問いに答えよ。ただし，同じ果物は区別がつかないものとする。

(1) 6 個の果物から 4 個を選び，1 列に並べる方法は何通りあるか。

(2) 6 個の果物から 4 個を選んで 1 列に並べるとき，りんごが隣り合って並ぶ確率を求めよ。

(1) (i) 同じ果物を 3 個含む場合

みかん 3 個と，りんご 1 個または桃 1 個を選ぶ場合で，その順列の総数は

$$2\times\frac{4!}{3!}=8\ \text{（通り）}$$

(ii) 同じ果物 2 個を 2 組含む場合

りんご 2 個，みかん 2 個を選ぶ場合で，その順列の総数は　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$（通り）

(iii) 同じ果物 2 個を 1 組のみ含む場合

2 個使う果物をりんご，みかんのいずれかとし，選ばなかった方の果物 1 個と，桃 1 個を加えた 4 個の果物の順列の総数は

$$\frac{4!}{2!}=12\ \text{（通り）}$$

よって，この場合の順列の総数は　$2\times12=24$（通り）

(i)～(iii)より，求める順列の総数は　$8+6+24=38$（通り）

(2) 2 個のりんごを a_1，a_2，3 個のみかんを b_1，b_2，b_3，桃を c とし，すべて区別して考える。

これら 6 個の果物から 4 個を選んで 1 列に並べる方法は ${}_6\mathrm{P}_4$ 通り

りんごが隣り合うためには，a_1，a_2 を 4 個の中に含む必要がある。

a_1，a_2 を選ぶとき，残り b_1，b_2，b_3，c の 4 個の中から 2 個を選ぶ方法が ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り

選んだ 4 個を，a_1，a_2 が隣り合うように並べる方法について

a_1，a_2 を 1 組として並べる方法が 3! 通り

a_1，a_2 の並べ方は 2! 通り

したがって，求める確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times3!\times2!}{{}_6\mathrm{P}_4}=\dfrac{4\cdot3\times3\cdot2\cdot1\times2\cdot1}{2\cdot1\times6\cdot5\cdot4\cdot3}=\dfrac{1}{5}$

PART2　和事象の確率・余事象の確率

2　1から10までの数字が書かれた10枚のカードが袋に入っている。この袋の中から3枚のカードを同時に取り出す。次の確率を求めよ。

(1)　5のカードを取り出す確率

(2)　カードの数字の最大が8以上である確率

(3)　1または2のカードを取り出す確率

3枚のカードの取り出し方は　${}_{10}C_3=120$（通り）

(1)　5のカードを取り出すとき，残り9枚から2枚を取り出す方法が　${}_9C_2=\dfrac{9\cdot 8}{2\cdot 1}=36$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$

(2)　最大の数字が8以上になるのは，最大の数字が8，9，10のいずれかの場合である。

最大の数字が8のとき，1から7までの7枚から2枚を取り出す方法が ${}_7C_2$ 通り

最大の数字が9のとき，1から8までの8枚から2枚を取り出す方法が ${}_8C_2$ 通り

最大の数字が10のとき，1から9までの9枚から2枚を取り出す方法が ${}_9C_2$ 通り

よって，求める確率は

$$\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_3}+\frac{{}_8C_2}{{}_{10}C_3}+\frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{21}{120}+\frac{28}{120}+\frac{36}{120}=\frac{17}{24}$$

（別解）

最大の数字が8以上である事象は，最大の数字が7以下である事象 A の余事象 $\overline{A}$ である。

事象 A は1から7までの7枚から3枚を取り出すときで　${}_7C_3=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35$（通り）

よって，求める確率は　$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3}=1-\dfrac{35}{120}=1-\dfrac{7}{24}=\dfrac{17}{24}$

(3)　1を取り出すとき，残り9枚から2枚を取り出す方法が ${}_9C_2$ 通り

2を取り出すとき，残り9枚から2枚を取り出す方法が ${}_9C_2$ 通り

1と2を取り出すとき，残り8枚から1枚を取り出す方法が ${}_8C_1$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}+\dfrac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}-\dfrac{{}_8C_1}{{}_{10}C_3}=\dfrac{36+36-8}{120}=\dfrac{8}{15}$

（別解）

１または２のカードを取り出す事象は，１も２も取り出さない事象 B の余事象 $\overline{B}$ である。

事象 B は１，２も取り出さない，つまり，３から10までの８枚から３枚を取り出すときで

$${}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56\ （通り）$$

よって，求める確率は

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=1-\frac{56}{120}=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

PART3　最大値・最小値の確率

3　3 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　出る目の最小値が 2 以上である確率

(2)　出る目の最小値が 2 以上 4 以下である確率

(3)　出る目の最小値が 2 である確率

(4)　出る目の最小値が 2，最大値が 5 である確率

3 個のさいころの目の出方は 6^3 通り

(1)　出る目がすべて 2 以上，すなわち，すべて 2 ～ 6 の目が出る場合で 5^3 通り

よって，求める確率は $\dfrac{5^3}{6^3}=\dfrac{125}{216}$

(2)　出る目がすべて 2 以上の場合から，出る目がすべて 5 以上の場合を除いた場合である。

出る目がすべて 5 以上，すなわち，すべて 5，6 の目が出る場合は 2^3 通り

よって，求める確率は $\dfrac{5^3-2^3}{6^3}=\dfrac{117}{216}=\dfrac{13}{24}$

(3)　出る目がすべて 2 以上の場合から，出る目がすべて 3 以上の場合を除いた場合である。

出る目がすべて 3 以上，すなわち，すべて 3 ～ 6 の目が出る場合は 4^3 通り

よって，求める確率は $\dfrac{5^3-4^3}{6^3}=\dfrac{61}{216}$

(4)　出る目がすべて 2，3，4，5 の場合から，2 または 5 が出ない場合を除いた場合である。

出る目がすべて 2，3，4，5 の場合は 4^3 通り

このうち

2 が出ないのは，出る目がすべて 3，4，5 の場合で 3^3 通り

5 が出ないのは，出る目がすべて 2，3，4 の場合で 3^3 通り

2 も 5 も出ないのは，出る目がすべて 3，4 の場合で 2^3 通り

よって，求める確率は $\dfrac{4^3-(3^3+3^3-2^3)}{6^3}=\dfrac{1}{12}$

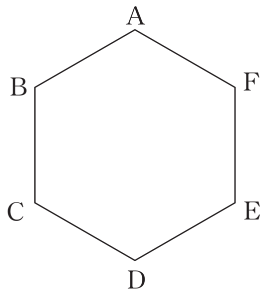
第 5 講　さまざまな試行と確率，期待値

PART1　反復試行の確率

1 右図のような正六角形 ABCDEF において，点 A を出発点として周上の点を移動する点 P がある。1 枚の硬貨を投げて表が出たときは左回りに 3 個，裏が出たときは右回りに 1 個分進む。

(1)　硬貨を 3 回投げて, 点 P が点 D にある確率を求めよ。

(2)　硬貨を 6 回投げて，点 P が点 E にある確率を求めよ。



表が x 回，裏が y 回出たとすると，点 P は左回りに $3x-y$ だけ進む。

(1)　$x+y=3$ より，点 P は左回りに

$$3x-(3-x)=4x-3$$

だけ進む。$0 \leqq x \leqq 3$ より $-3 \leqq 4x-3 \leqq 9$ であるから，点 P が点 D にあるのは

$$4x-3=-3,\ 3,\ 9$$

のとき。x は整数より $x=0,\ 3$

よって，求める確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$

(2)　$x+y=6$ より，点 P は左回りに

$$3x-(6-x)=4x-6$$

だけ進む。$0 \leqq x \leqq 6$ より $-6 \leqq 4x-6 \leqq 18$ であるから，点 P が点 E にあるのは

$$4x-6=-2,\ 4,\ 10,\ 16$$

のとき。x は整数より $x=1,\ 4$

よって，求める確率は ${}_6C_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^5+{}_6C_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{21}{64}$

PART2　条件付き確率

2　[1]　白玉 5 個と赤玉 3 個が入っている袋から，1 個ずつ順に 3 個の玉を取り出す。取り出した 1 番目の玉が赤であるとき，3 番目の玉が白である確率を求めよ。

[2]　A と B の 2 つの袋があって，A には白玉 4 個と赤玉 6 個，B には白玉 5 個と赤玉 5 個が入っている。A から 1 個取り出して B に入れ, よくかきまぜてから 1 個取り出して A に入れるとき，次の確率を求めよ。

(1)　A の白玉の数が増加する確率

(2)　A の白玉の数が減少する確率

(3)　A の白玉の数が変わらない確率

[1]　1 番目に取り出した玉が赤である事象を A，3 番目に取り出した玉が白である事象を B とする。

$$P(A)=\frac{3}{8}$$

$A\cap B$ は，1 番目から順に赤玉，赤玉，白玉，または赤玉，白玉，白玉と出る場合であるから

$$P(A\cap B)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{15}{56}$$

よって，求める確率は　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{15}{56}\div\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{7}$

（別解）　1 番目に赤玉を取り出したとき，残りの玉は白玉 5 個，赤玉 2 個である。ここから次の 2 回で順に赤玉，白玉，または白玉，白玉が出ればよい。

よって，求める確率は　$P_A(B)=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{5}{6}+\dfrac{5}{7}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{5}{7}$

[2]　(1)　A の白玉の数が増加するのは, A から赤玉を取り出し, B から白玉を取り出すときである。

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{10}\times\dfrac{5}{11}=\dfrac{3}{11}$

⑵　Ａの白玉の数が減少するのは，Ａから白玉を取り出し，Ｂから赤玉を取り出すときである。

よって，求める確率は　$\frac{4}{10}\times\frac{5}{11}=\frac{2}{11}$

⑶　Ａの白玉の数が変わらないのは，Ａから取り出した玉の色とＢから取り出した玉の色が同じときである。

よって，求める確率は　$\frac{6}{10}\times\frac{6}{11}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{11}=\frac{6}{11}$

(別解)

Ａの白玉の数が変わらないのは，⑴⑵以外のときである。

よって，求める確率は　$1-\left(\frac{3}{11}+\frac{2}{11}\right)=\frac{6}{11}$

PART3　期待値

3　2 個のさいころを同時に投げるとき，2 個のさいころの出る目の和の期待値を求めよ。

出る目の和に対し，2 つのさいころの出る目の組合せを考える。

和が 2 …$\underline{(1,\ 1)}$

和が 3 …$(1,\ 2)$

和が 4 …$(1,\ 3)$，$\underline{(2,\ 2)}$

和が 5 …$(1,\ 4)$，$(2,\ 3)$

和が 6 …$(1,\ 5)$，$(2,\ 4)$，$\underline{(3,\ 3)}$

和が 7 …$(1,\ 6)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 4)$

和が 8 …$(2,\ 6)$，$(3,\ 5)$，$\underline{(4,\ 4)}$

和が 9 …$(3,\ 6)$，$(4,\ 5)$

和が 10 …$(4,\ 6)$，$\underline{(5,\ 5)}$

和が 11 …$(5,\ 6)$

和が 12 …$\underline{(6,\ 6)}$

それぞれの出る目がどちらのさいころで出たかを順列で考えると，$\underline{\qquad\qquad}$の組合せに対しては 1 通り，それ以外は $2!$ 通り。

したがって，求める期待値は

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}$$
$$+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}$$

$$=\frac{1}{36}(2\cdot1+3\cdot2+4\cdot3+5\cdot4+6\cdot5+7\cdot6+8\cdot5+9\cdot4+10\cdot3+11\cdot2+12\cdot1)$$

$$=\frac{1}{36}\times252$$

$$=7$$

第 6 講　三角形の性質

PART1　三角形の内心，角の二等分線の性質

1　AB＝4，BC＝10，CA＝7 である △ABC の内心を I とし，直線 BI と辺 AC の交点を D とする。このとき，次の比を求めよ。

(1)　△BAI：△BCI

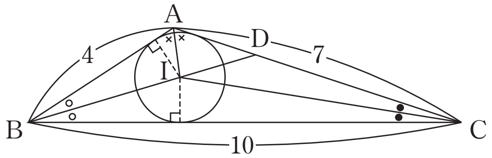
(2)　△AIC：△ABC

(3)　△CID：△ABC

(1)　BD は ∠B の二等分線であるから

AD：DC＝BA：BC＝4：10＝2：5

よって　△BAI：△BCI＝AD：DC＝2：5



(別解)

△BAI，△BCI の底辺をそれぞれ，BA，BC とすると，高さはともに内接円の半径となる。

よって，△BAI：△BCI＝BA：BC＝4：10＝2：5

(2)　(1)より　$AD=\frac{2}{7}AC=\frac{2}{7}\cdot 7=2$

AI は ∠A の二等分線であるから　BI：ID＝AB：AD＝4：2＝2：1

よって　△AIC：△ABC＝ID：BD＝1：(1＋2)＝1：3

(別解)

△ABI，△BCI，△ACI の底辺をそれぞれ

AB，BC，AC とすると，高さはすべて内接円の半径となる。

よって　△ABI：△BCI：△ACI＝4：10：7

したがって　△AIC：△ABC＝7：(4＋10＋7)＝7：21＝1：3

(3)　$\triangle CID=\frac{CD}{AC}\triangle AIC=\frac{5}{7}\triangle AIC$

(2)より　$\triangle AIC=\frac{1}{3}\triangle ABC$

よって　$\triangle CID=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{3}\triangle ABC=\frac{5}{21}\triangle ABC$

したがって　△CID：△ABC＝5：21

（別解）

$$\triangle \mathrm{CID} = \frac{\mathrm{ID}}{\mathrm{BD}} \triangle \mathrm{CBD} = \frac{1}{3} \triangle \mathrm{CBD}$$

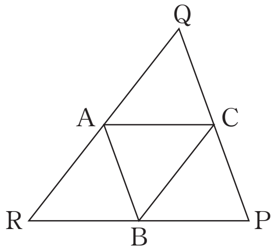
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}} \triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} \triangle \mathrm{ABC} = \frac{5}{21} \triangle \mathrm{ABC}$$

よって　$\triangle \mathrm{CID} : \triangle \mathrm{ABC} = 5 : 21$

PART2　三角形の外心・垂心

2　三角形の各頂点から対辺に下ろした垂線は 1 点で交わる(これを垂心という)。
このことを，次の方針にしたがって証明せよ。

△ABC の頂点 A, B, C を通り，各頂点の対辺と平行な 3 つの直線の交点を右図のように P，Q，R とする。
△ABC の頂点 A，B，C からそれぞれの対辺に垂線 AD，BE，CF を下ろしたとき，AD，BE，CF が，△PQR の外心において 1 点で交わることを証明する。



四角形 ABCQ は平行四辺形であるから AQ＝BC

四角形 ACBR は平行四辺形であるから AR＝BC

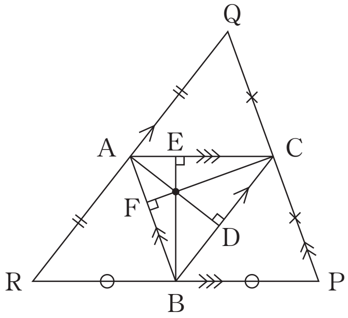
よって AQ＝AR であるから，点 A は線分 RQ の中点である。

また，AD ⊥ BC かつ BC // RQ であるから AD ⊥ RQ

したがって，AD は辺 RQ の垂直二等分線である。

同様に，BE は辺 RP の垂直二等分線であり，CF は辺 PQ の垂直二等分線である。

よって，△ABC の各頂点から対辺に下ろした垂線 AD，BE，CF は，△PQR の外心において 1 点で交わる。

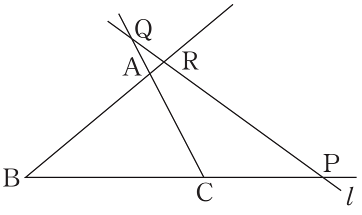


PART3　チェバの定理・メネラウスの定理

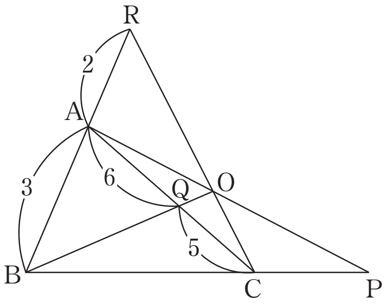
3 (1)　右図の $\triangle ABC$ において，辺 BC，CA，AB の延長と直線 l との交点をそれぞれ P，Q，R とするとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，直線 l は $\triangle ABC$ の頂点を通らない。



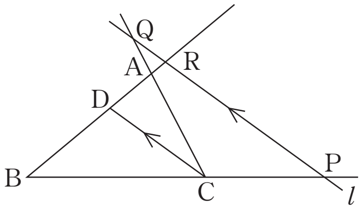
(2)　右図の $\triangle ABC$ の外部に点 O があり，直線 AO，BO，CO がそれぞれ辺 BC，CA，AB またはその延長と交わる点をそれぞれ P，Q，R とする。BA：AR＝3：2，AQ：QC＝6：5 のとき，BQ：QO を求めよ。



(1)　点 C を通り直線 l に平行な直線を引き，直線 AB との交点を D とすると

PR∥CD より $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{BR}{RD}$

QR∥CD より $\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{DR}{RA}$



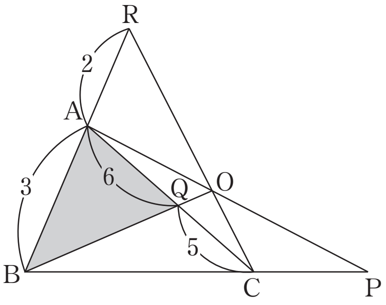
よって　$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{BR}{RD}\cdot\dfrac{DR}{RA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$

(2)　$\triangle ABQ$ と直線 RC について，(1)より

$$\frac{BR}{RA}\cdot\frac{AC}{CQ}\cdot\frac{QO}{OB}=1$$

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{11}{5}\cdot\frac{QO}{OB}=1$$

$$\frac{QO}{OB}=\frac{2}{11}$$

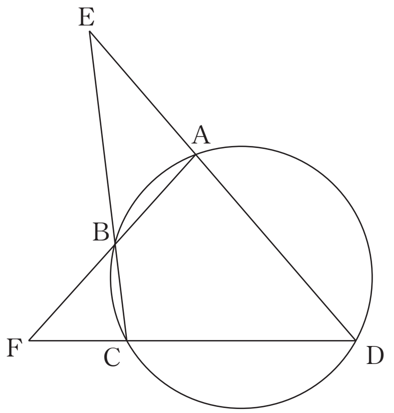


したがって　BQ：QO＝9：2

第 7 講　円の性質

PART1　方べきの定理

1　円に内接する四角形 ABCD があり，AD＝5，BC＝2 である。また，直線 AD と直線 BC の交点を E, 直線 AB と直線 CD の交点を F とすると，AE＝3，CF＝2 である。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　BE の長さを求めよ。

(2)　CD の長さを求めよ。

(3)　∠E の二等分線と直線 CD との交点を G とし，∠F の二等分線と直線 EG の交点を H，直線 AD との交点を I とするとき，FH：HI を求めよ。

(1)　方べきの定理より EA・ED＝EB・EC

BE＝x とすると　$3\cdot(3+5)=x\cdot(x+2)$　　$x^2+2x-24=0$　　$(x+6)(x-4)=0$

$x>0$ より $x=4$　　よって　BE＝4

(2)　△ECD と直線 AF にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CB}{BE}\cdot\frac{EA}{AD}=1 \qquad \frac{DF}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=1 \qquad DF=\frac{20}{3}$$

よって　$CD=DF-FC=\dfrac{20}{3}-2=\dfrac{14}{3}$

(3)　△ECD において，角の二等分線の性質より

$$CG:GD=EC:ED=(4+2):8=3:4$$

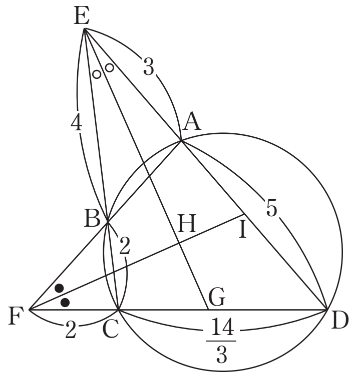
$$CG=\frac{3}{3+4}CD=\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{3}=2$$

ここで，△FDA∽△FBCであるから

FA：FC＝AD：CB

FA：2＝5：2

FA＝5



よって，△FDA において，角の二等分線の性質より

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{FA}:\mathrm{FD}=5:\frac{20}{3}=3:4$$

$$\mathrm{AI}=\frac{3}{3+4}\mathrm{AD}=\frac{3}{7}\cdot 5=\frac{15}{7}$$

したがって，△FDI と直線 EG にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EI}}\cdot\frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{HF}}\cdot\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GD}}=1 \qquad \frac{5+3}{3+\frac{15}{7}}\cdot\frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{HF}}\cdot\frac{2+2}{\frac{14}{3}-2}=1 \qquad \frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{HF}}=\frac{3}{7}$$

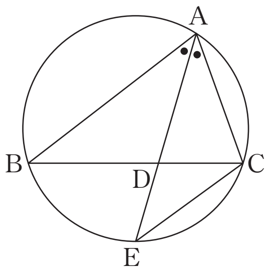
であるから，FH：HI＝7：3

PART2　方べきの定理，内接四角形の性質

2 (1) △ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

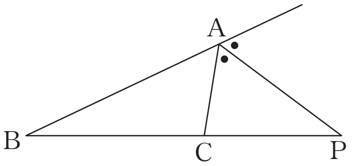
が成り立つことを証明せよ。必要に応じて，△ABC の ∠A の二等分線が外接円と交わる点を E とすると，△ABD ∽ △AEC であることを用いよ。



(2) △ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を P とする。このとき

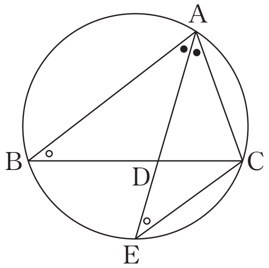
$$AP^2 = BP \cdot PC - AB \cdot AC$$

が成り立つことを証明せよ。



(1) △ABC の ∠A の二等分線が外接円と交わる点を E とすると，△ABD ∽ △AEC であるから

$AB : AE = AD : AC$　　$AD \cdot AE = AB \cdot AC$ …… ①



また，方べきの定理より $DA \cdot DE = DB \cdot DC$

よって　$AD \cdot DE = BD \cdot CD$ …… ②

①－②より　$AD \cdot AE - AD \cdot DE = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

$AD \cdot (AE - DE) = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

ゆえに　$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

(2) △ABC の外接円と直線 PA の交点のうち A でないものを Q とすると，

右図より　△ABQ ∽ △APC であるから

$AB : AP = AQ : AC$　　$AP \cdot AQ = AB \cdot AC$ …… ①

また，方べきの定理より　$PA \cdot PQ = PC \cdot PB$

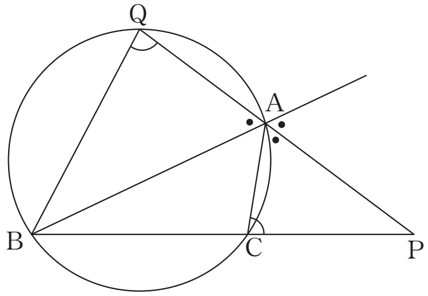
よって　$AP \cdot PQ = BP \cdot PC$ …… ②

②－①より

$AP \cdot PQ - AP \cdot AQ = BP \cdot PC - AB \cdot AC$

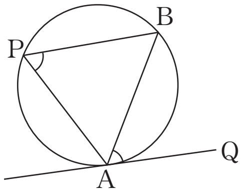
$AP \cdot (PQ - AQ) = BP \cdot PC - AB \cdot AC$

ゆえに　$AP^2 = BP \cdot PC - AB \cdot AC$



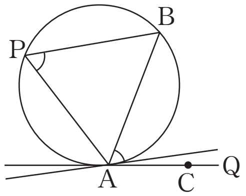
PART3　接弦定理とその逆

3 (1) 直線 AB に対して，点 P と点 Q が反対側にある。
このとき，$\angle BAQ = \angle APB$ ならば，直線 AQ は
△ABPの外接円と接することを証明せよ。

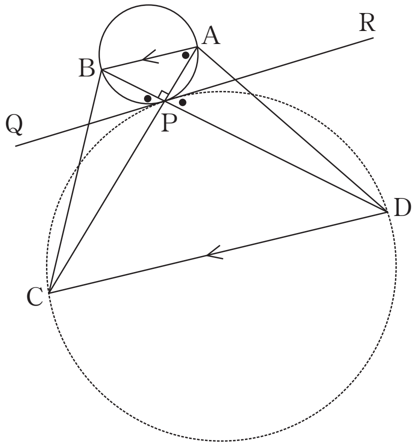


(2) 四角形 ABCD において，2 本の対角線 AC と BD が点 P で直交し，$AB /\!/ DC$ であるとする。このとき，△PAB と △PCD のそれぞれの外接円は互いに外接することを証明せよ。

(1) △ABP の外接円の点 A における接線上に，右図のように
点 C をとると，接弦定理より　$\angle BAC = \angle APB$
仮定より $\angle BAQ = \angle APB$
よって $\angle BAC = \angle BAQ$
点 Q は直線 AB に対して点 P と反対側にある点であるから，点 A, C, Q は同一直線上にある。
よって，2 直線 AQ，AC は一致し，直線 AQ は △ABPの外接円と接する。



(2) 右図のように，△PAB の外接円において，点 P を通る
接線 QR を引くと，接弦定理より $\angle BPQ = \angle PAB$
対頂角は等しいので $\angle BPQ = \angle RPD$
よって $\angle PAB = \angle RPD$
$AB /\!/ DC$ より $\angle PAB = \angle PCD$
よって $\angle RPD = \angle PCD$
したがって(1)より，直線 QR は，点 P において
△PCD の外接円と接する。
ゆえに，△PAB と △PCD のそれぞれの外接円は，
点 P で互いに外接する。



第 8 講　約数と倍数

PART1　最小公倍数と最大公約数

1　$a<b<c$ を満たす3つの自然数 a, b, c がある。次の(i), (ii), (iii)を同時に満たす a, b, c をすべて求めよ。

(i)　a, b, c の最大公約数は45

(ii)　b と c の最大公約数は225，最小公倍数は1350

(iii)　a と b の最小公倍数は3150

(ii)より，b と c の最大公約数は225であるから

$$b=225b'=3^2\cdot5^2\cdot b',\ c=225c'=3^2\cdot5^2\cdot c'\ (b',\ c'\text{ は互いに素な自然数で，}b'<c')$$

と表される。また，b と c の最小公倍数は1350であるから

$225b'c'=1350$　よって　$b'c'=6$

これを満たす b', c' は　$(b',\ c')=(1,\ 6),\ (2,\ 3)$

したがって　$(b,\ c)=(225,\ 1350),\ (450,\ 675)$

(i)より，a, b, c の最大公約数は $45=3^2\cdot5$ であるから

$a=45a'=3^2\cdot5\cdot a'$（a' は5の倍数ではない自然数）

(iii)より，a と b の最小公倍数は $3150=2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7$

$b=225=3^2\cdot5^2$ のとき

$a=2\cdot3^2\cdot5\cdot7$ であるが，これは $a<b$ を満たさず不適。

$b=450=2\cdot3^2\cdot5^2$ のとき

$a=3^2\cdot5\cdot7$ または　$a=2\cdot3^2\cdot5\cdot7$ であり，$a<b$ を満たすものは $a=3^2\cdot5\cdot7$ である。

よって　$a=315$

以上より　$(a,\ b,\ c)=(315,\ 450,\ 675)$

PART2　余りによる分類，合同式

2　n を整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　n^2+7n+4 は偶数である。

(2)　n^2+1 は 3 の倍数ではない。

(1)　すべての整数 n は，$2k$，$2k+1$ (k は整数) のいずれかで表される。

$n=2k$ のとき

$$n^2+7n+4=(2k)^2+7\cdot 2k+4=4k^2+14k+4=2(2k^2+7k+2)$$

$n=2k+1$ のとき

$$n^2+7n+4=(2k+1)^2+7(2k+1)+4=4k^2+18k+12=2(2k^2+9k+6)$$

よって，n^2+7n+4 は偶数である。

(2)　すべての整数 n は，$3k$，$3k+1$，$3k+2$ (k は整数) のいずれかで表される。

$n=3k$ のとき

$$n^2+1=(3k)^2+1=3\cdot 3k^2+1$$

$n=3k+1$ のとき

$$n^2+1=(3k+1)^2+1=9k^2+6k+2=3(3k^2+2k)+2$$

$n=3k+2$ のとき

$$n^2+1=(3k+2)^2+1=9k^2+12k+5=3(3k^2+4k+1)+2$$

よって，n^2+1 を 3 で割った余りは 1 または 2 であり，n^2+1 は 3 の倍数ではない。

(別解)

(1)　$n\equiv 0 \pmod 2$ のとき

$$n^2+7n+4\equiv 0^2+7\cdot 0+4\equiv 4\equiv 0 \pmod 2$$

$n\equiv 1 \pmod 2$ のとき

$$n^2+7n+4\equiv 1^2+7\cdot 1+4\equiv 12\equiv 0 \pmod 2$$

よって，n^2+7n+4 は偶数である。

⑵　$n \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$n^2+1 \equiv 0^2+1 \equiv 1 \pmod 3$$

$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$n^2+1 \equiv 1^2+1 \equiv 2 \pmod 3$$

$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$n^2+1 \equiv 2^2+1 \equiv 5 \equiv 2 \pmod 3$$

よって，n^2+1 を 3 で割った余りは 1 か 2 であり，n^2+1 は 3 の倍数ではない。

PART3　ピタゴラス数

3　a，b，c を整数とし，$a^2+b^2=c^2$ とする。次のことを証明せよ。

(1)　a^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 である。

(2)　a，b のうち，少なくとも 1 つは 3 の倍数である。

(3)　a^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

(4)　a，b，c が互いに素であるとき，c は奇数である。

(1)　すべての整数 a は，$3k$，$3k+1$，$3k+2$ (k は整数)のいずれかで表される。

$a=3k$ のとき　$a^2=(3k)^2=3\cdot3k^2$

$a=3k+1$ のとき　$a^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

$a=3k+2$ のとき　$a^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

よって，a^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 である。

(2)　a，b がともに 3 の倍数でないと仮定する。

このとき，(1)より a^2，b^2 はともに 3 で割った余りが 1 であるから，a^2+b^2 を 3 で割った余りは 2 である。また(1)より，c^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 である。

よって，$a^2+b^2=c^2$ であることに矛盾する。

したがって，a，b のうち，少なくとも 1 つは 3 の倍数である。

(3)　すべての整数 a は，$2k$，$2k+1$ (k は整数)のいずれかで表される。

$a=2k$ のとき　$a^2=(2k)^2=4k^2$

$a=2k+1$ のとき　$a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$

よって，a^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

(4)　a，b は互いに素であるから，a，b がともに偶数であることはない。

a，b がともに奇数のとき，(3)より a^2，b^2 はともに 4 で割った余りが 1 であるから，a^2+b^2 を 4 で割った余りは 2 である。また(3)より，c^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

よって，$a^2+b^2=c^2$ であることに矛盾するから，a，b がともに奇数であることはない。

したがって，a，b は偶奇を異にする。

対称性より，a を偶数，b を奇数としても一般性を失わない。このとき，a^2+b^2 は奇数であるから c^2 も奇数である。したがって，a，b，c が互いに素であるとき，c は奇数である。

第 9 講　ユークリッドの互除法，整数の性質の活用

PART1　不定方程式(2 元 1 次)

1　次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$5x-2y=25$

(2)　$24x+19y=7$

(1)　$5x-2y=25$ より　$5(x-5)=2y$ …… ①

2 と 5 は互いに素であるから，$x-5$ は 2 の倍数である。

よって，$x-5=2k$ (k は整数) と表される。

このとき，①より　$5\cdot 2k=2y$　$y=5k$

したがって，求める整数解は　$x=2k+5$，$y=5k$ (k は整数)

(2)　$24x+19y=7$ …… ①

24 と 19 に互除法を用いると

$24=19\cdot 1+5$ より $5=24-19\cdot 1$

$19=5\cdot 3+4$ より $4=19-5\cdot 3$

$5=4\cdot 1+1$ より $1=5-4\cdot 1$

これより

$$\begin{aligned}1&=5-4\cdot 1\\&=5-(19-5\cdot 3)\cdot 1\\&=5\cdot 4+19\cdot(-1)\\&=(24-19\cdot 1)\cdot 4+19\cdot(-1)\\&=24\cdot 4+19\cdot(-5)\end{aligned}$$

よって　$24\cdot 4+19\cdot(-5)=1$

この式の両辺を 7 倍して　$24\cdot 28+19\cdot(-35)=7$ …… ②

①－②より　$24(x-28)+19(y+35)=0$　つまり　$24(x-28)=-19(y+35)$ …… ③

24 と 19 は互いに素であるから $x-28$ は 19 の倍数である。

よって，$x-28=19k$ (k は整数) と表される。

このとき，③より　$24\cdot 19k=-19(y+35)$　　$24k=-(y+35)$

したがって，求める整数解は　$x=19k+28$，$y=-24k-35$ (k は整数)

PART2　いろいろな不定方程式

2　[1]　$4x+2y+z=15$ を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

[2]　(1)　$xy-3x-7y+15=0$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

(2)　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4$ を因数分解せよ。また，その結果を用いて，$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$ を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

[1]　$4x+2y+z=15$ より $4x=15-2y-z$

$y \geqq 1$，$z \geqq 1$ より，$-2y \leqq -2$，$-z \leqq -1$ であるから

$$4x=15-2y-z \leqq 15-2-1=12$$

よって，$4x \leqq 12$ より $x \leqq 3$

x は自然数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$

$x=1$ のとき　$4+2y+z=15$　より　$2y+z=11$

$z \geqq 1$ より $2y=11-z \leqq 11-1=10$　　よって　$y \leqq 5$

したがって　$(y,\ z)=(1,\ 9),\ (2,\ 7),\ (3,\ 5),\ (4,\ 3),\ (5,\ 1)$

$x=2$ のとき　$8+2y+z=15$　より　$2y+z=7$

$z \geqq 1$ より $2y=7-z \leqq 7-1=6$　　よって　$y \leqq 3$

したがって　$(y,\ z)=(1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1)$

$x=3$ のとき　$12+2y+z=15$　より　$2y+z=3$

$z \geqq 1$ より $2y=3-z \leqq 3-1=2$　　よって　$y \leqq 1$

したがって　$(y,\ z)=(1,\ 1)$

以上より　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 9),\ (1,\ 2,\ 7),\ (1,\ 3,\ 5),\ (1,\ 4,\ 3),\ (1,\ 5,\ 1),$
$(2,\ 1,\ 5),\ (2,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1)$

[2]　(1)　$xy-3x-7y+15=0$　より　$(x-7)(y-3)-21+15=0$

よって　$(x-7)(y-3)=6$

x，y は自然数であるから，$x-7$，$y-3$ は整数

また，$x-7 \geqq 1-7 \geqq -6$，$y-3 \geqq 1-3 \geqq -2$

したがって　$(x-7,\ y-3)=(-6,\ -1),\ (-3,\ -2),\ (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (4,\ 1),\ (8,\ 9),\ (9,\ 6),\ (10,\ 5),\ (13,\ 4)$

(2)

$$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4$$
$$=6x^2+(y-5)x-2(y^2-3y+2)$$
$$=6x^2+(y-5)x-2(y-1)(y-2)$$
$$=(3x+2y-4)(2x-y+1)$$

$$\begin{array}{ccccr} 3 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 2(y-2) & \longrightarrow & 4y-8 \\ 2 & & -(y-1) & \longrightarrow & -3y+3 \\ \hline & & & & y-5 \end{array}$$

$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$

$(6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4)-16=0$

$(3x+2y-4)(2x-y+1)=16$

x，y は自然数より，$3x+2y-4$，$2x-y+1$ は整数である。

また，$3x+2y-4 \geqq 3\cdot1+2\cdot1-4=1>0$ より $2x-y+1>0$

したがって　$(3x+2y-4,\ 2x-y+1)=(1,\ 16),\ (2,\ 8),\ (4,\ 4),\ (8,\ 2),\ (16,\ 1)$

ここで，$3x+2y-4=m$，$2x-y+1=n$（m，n は整数）とすると

$$x=\frac{1}{7}(m+2n+2),\quad y=2x+1-n$$

x が自然数となるのは，$(m,\ n)=(1,\ 16),\ (4,\ 4),\ (8,\ 2)$ のときで

$(m,\ n)=(1,\ 16)$ のとき　$x=5$，$y=-5$

$(m,\ n)=(4,\ 4)$ のとき　$x=2$，$y=1$

$(m,\ n)=(8,\ 2)$ のとき　$x=2$，$y=3$

したがって，求める自然数 x，y の組は　$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (2,\ 3)$

PART3　n 進数

3 (1) 3 進法で表すと 6 桁になるような自然数 N は何個あるか。

(2) 自然数 N を 5 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(5)}$ となり，7 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(7)}$ となる。a，b，c を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

(1) 題意より　$3^5 \leqq N < 3^6$

N は自然数であるから　$3^5 \leqq N \leqq 3^6 - 1$

これを満たす自然数 N の個数は

$$(3^6-1)-3^5+1=3^6-3^5=3^5(3-1)=243\cdot 2=486\text{(個)}$$

(2) $abc_{(5)}$ は 3 桁の 5 進数であるから　$1 \leqq a \leqq 4$，$0 \leqq b \leqq 4$，$0 \leqq c \leqq 4$

$cab_{(7)}$ は 3 桁の 7 進数であるから　$1 \leqq c \leqq 6$，$0 \leqq a \leqq 6$，$0 \leqq b \leqq 6$

よって　$1 \leqq a \leqq 4$，$0 \leqq b \leqq 4$，$1 \leqq c \leqq 4$

$$N=abc_{(5)}=a\cdot 5^2+b\cdot 5^1+c\cdot 5^0=25a+5b+c$$

$$N=cab_{(7)}=c\cdot 7^2+a\cdot 7^1+b\cdot 7^0=49c+7a+b$$

よって　$25a+5b+c=49c+7a+b$　より　$24c-9a=2b$

すなわち　$3(8c-3a)=2b$ …… ①

2 と 3 は互いに素であるから，b は 3 の倍数

$0 \leqq b \leqq 4$ より，$b=0$，3

$b=0$ のとき　①より $3a=8c$

3 と 8 は互いに素であるから, a は 8 の倍数であるが, $1 \leqq a \leqq 4$ を満たす 8 の倍数は存在せず不適。

$b=3$ のとき　①より　$8c-3a=2$　すなわち　$8c=3a+2$ …… ②

よって，$3a+2$ は 8 の倍数

$1 \leqq a \leqq 4$ より，$5 \leqq 3a+2 \leqq 14$ であるから，$3a+2=8$　よって　$a=2$

このとき②より　$c=1$（$1 \leqq c \leqq 4$ を満たす）

以上より　$a=2$，$b=3$，$c=1$

したがって　$N=25\cdot 2+5\cdot 3+1=66$

確認問題　解答

第 1 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] アイウ：100，エオ：86

[解説]

1 から 200 までの整数全体の集合を U とし，U の部分集合のうち，3 の倍数全体の集合を A，4 の倍数全体の集合を B，7 の倍数全体の集合を C とすると

$n(U)=200$

$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot66\}$ より　$n(A)=66$

$B=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot50\}$ より　$n(B)=50$

$C=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot28\}$ より　$n(C)=28$

また，$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$，$A\cap B\cap C$はそれぞれ 12 の倍数，28 の倍数，21 の倍数，84 の倍数全体の集合であるから

$A\cap B=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot16\}$ より

$n(A\cap B)=16$

$B\cap C=\{28\cdot1,\ 28\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 28\cdot7\}$ より

$n(B\cap C)=7$

$C\cap A=\{21\cdot1,\ 21\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 21\cdot9\}$ より

$n(C\cap A)=9$

$A\cap B\cap C=\{84\cdot1,\ 84\cdot2\}$ より

$n(A\cap B\cap C)=2$

(1)　3 でも 4 でも割り切れない整数全体の集合は

$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$ である。 [A]

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ [B]

$=66+50-16=100$

よって，求める整数の個数は

$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

$=200-100=\mathbf{100}$

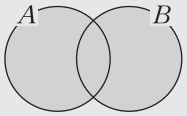
[A]　ド・モルガンの法則

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

[B]　和集合の要素の個数

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$



(2)　3 でも 4 でも 7 でも割り切れない整数全体の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$ である。 [A]

$$\begin{aligned}&n(A\cup B\cup C)\\&=n(A)+n(B)+n(C)\\&\quad -n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\\&\qquad +n(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$ [C]

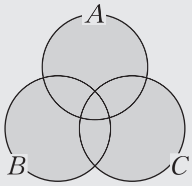
$$\begin{aligned}&=66+50+28-16-7-9+2\\&=114\end{aligned}$$

よって，求める整数の個数は

$$\begin{aligned}n(\overline{A\cup B\cup C})&=n(U)-n(A\cup B\cup C)\\&=200-114=86\end{aligned}$$

[C]　和集合の要素の個数

$$\begin{aligned}&n(A\cup B\cup C)\\&=n(A)+n(B)+n(C)\\&\quad -n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\\&\qquad +n(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$



第 1 講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** アイ：10

[解説]

$x+y \leqq 3$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組は

$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 2),\ (0,\ 3),$ [A]

$(1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2),$

$(2,\ 0),\ (2,\ 1),$

$(3,\ 0)$

の **10** 組

［A］　小さい数からなど，規則正しく数え上げる。

（別解）

$x+y \leqq 3$ となるのは次の(ⅰ)～(ⅳ)の場合である。

(ⅰ)　$x+y=0$　　(ⅱ)　$x+y=1$

(ⅲ)　$x+y=2$　　(ⅳ)　$x+y=3$

(ⅰ)のとき

$(x,\ y)=(0,\ 0)$ の 1 通り

(ⅱ)のとき

$(x,\ y)=(0,\ 1),\ (1,\ 0)$ の 2 通り

(ⅲ)のとき

$(x,\ y)=(0,\ 2),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0)$ の 3 通り

(ⅳ)のとき

$(x,\ y)=(0,\ 3),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0)$

の 4 通り

(ⅰ)～(ⅳ)のどの 2 つも同時に起こらないから，求める組は　$1+2+3+4=$ **10**（組） [B]

［B］　和の法則
事柄 A，B が，同時には起こらないとする。A の起こり方が a 通り，B の起こり方が b 通りであるとき，A，B のいずれかが起こる場合の数は $a+b$ 通りである。

2 [正解] ウエ：45

[解説]

$(a+b+c)(d+e+f)(g+h+i+j+k)$ の展開式における項は

$(a,\ b,\ c$ のいずれか 1 つ$)$

$\times\ (d,\ e,\ f$ のいずれか 1 つ$)$

$\times\ (g,\ h,\ i,\ j,\ k$ のいずれか 1 つ$)$

の形である。よって，異なる項の個数は

$3\times3\times5=$ **45**（個） [C]

> [C]　積の法則
> 事柄 A の起こり方が a 通りあり，そのそれぞれに対して，事柄 B の起こり方が b 通りであるとき，A，B がともに起こる場合の数は $a\times b$ 通りである。

3 [正解] オカ：24，キクケコ：2240

[解説]

$756=2^2\cdot3^3\cdot7$ より，756 の正の約数は

$(2^2$ の正の約数の 1 つ$)$

$\times\ (3^3$ の正の約数の 1 つ$)$

$\times\ (7$ の正の約数の 1 つ$)$

の形で表される。

2^2 の正の約数は 1，2，2^2 の 3 個

3^3 の正の約数は 1，3，3^2，3^3 の 4 個

7 の正の約数は 1，7 の 2 個

よって，正の約数の個数は　$3\times4\times2=$ **24**（個） [D]

また，756 の正の約数 24 個は

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+7)$$

を展開した項として現れる。よって，求める総和は

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+7)$$ [D]

$=7\cdot40\cdot8=$ **2240**

> [D]　自然数 N が $N=p^aq^br^c\cdots$ と素因数分解されるとき，N の正の約数の個数は
> $(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$
> 正の約数の総和は
> $(1+p+\cdots+p^a)(1+q+\cdots+q^b)\times(1+r+\cdots+r^c)\cdots\cdots$

第 1 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：9，ウエ：44

[解説]

n 個のプレゼントを，①，②，……，ⓝとする。

求める場合の数は，n 個のプレゼントを 1 列に並べた順列のうち，すべての k について，k 番目のプレゼントがⓚでないものの総数(k は $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数)である。 [A]

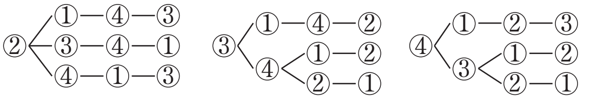
> [A]　1 から n までの整数を 1 列に並べた順列のうち，すべての k について
> 　k 番目がⓚではない
> を満たすものを「完全順列」(または「攪乱（かくらん）順列」) という。ただし，k は $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数。
> 完全順列の総数は，樹形図をかいて求めることができる。

$n=3$ のとき，条件を満たす順列は右図。よって　2 通り

②──③──①
③──①──②

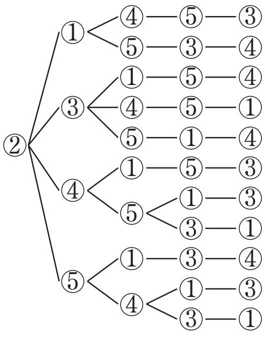
$n=4$ のとき，条件を満たす順列は下図。

よって　9 通り



$n=5$ のとき

1 番目が②のとき，条件を満たす順列は右図の 11 通り。



1 番目が③，④，⑤のときも同様に 11 通りずつある。

したがって，求める場合の数は　$11 \times 4 = 44$（通り）

(別解)

n 個のプレゼントを 1 列に並べた順列のうち, すべての k について，k 番目のプレゼントがⓚでないものの総数(k は $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数)を $W(n)$ とする。 [B]

> [B]　完全順列は，$n \geqq 4$ のときには，$W(n-1)$, $W(n-2)$ を利用して $W(n)$ を求めることができる。

$n=2$ のとき，右図の 1 通りのみ。　②──①

よって　$W(2)=1$

$n=3$ のとき，右図より　２通り

②――③――①
③――①――②

よって　$W(3)=\mathbf{2}$

$n=4$ のとき，①が２番目の場合を考える。

(i)　②が１番目のとき

③，④と３番目，４番目について，

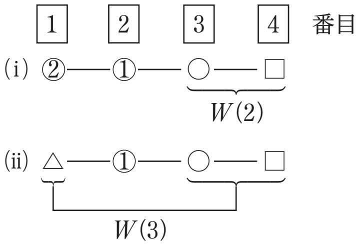
③が３番目以外，④が４番目以外であるから，

その総数は　$W(2)$

(ii)　②が１番目以外のとき

②，③，④と１番目，３番目，４番目について，

②が１番目以外，③が３番目以外，④が４番目以外であるから，その総数は　$W(3)$



(i)，(ii)より，①が２番目のときの場合の数は

$W(2)+W(3)=1+2=3$

①が３番目，４番目のときも同様であるから

$W(4)=3\times3=\mathbf{9}$ [C]

$n=5$ のとき，①が２番目の場合を考える。

(i)　②が１番目のとき

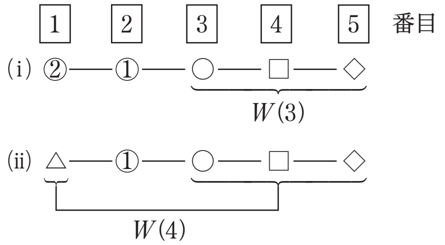
③，④，⑤と３番目，４番目，５番目について，

③が３番目以外，④が４番目以外，⑤が５番目以外であるから，その総数は　$W(3)$

(ii)　②が１番目以外のとき

②，③，④，⑤と１番目，３番目，４番目，５番目について，②が１番目以外，③が３番目以外，④が４番目以外，⑤が５番目以外であるから，その総数は　$W(4)$

[C]　一般に，$n\geqq3$ のとき
$W(n)=(n-1)\{W(n-1)+W(n-2)\}$
が成り立つ。



(i)，(ii)より，①が２番目のときの場合の数は

$$W(3)+W(4)=2+9=11$$

①が３番目，４番目，５番目のときも同様であるから

$$W(5)=11\times4=44$$

第2講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] アイ：48，ウエオ：288

[解説]

(1) 両端のA，Bの並び方は　A○○○○B

$2!$ 通り [A]

そのそれぞれに対して，C，D，E，Fの4人の並び方は　$4!$ 通り

よって，求める並び方の総数は

$2! \times 4! = 2 \times 24 = 48$（通り）

[A]　条件がついている部分から最優先で処理する。ここでは，「両端」の条件から考える。

(2) A，Bの間に2人以上入るのは，次の3つの場合である。

(i) A，Bの間に2人のみ入るとき [B]

A，Bの並び方は　$2!$ 通り　A○○B○○

A，Bの間に入る2人の並び方は　${}_4P_2$ 通り

A，Bとその間に入る2人の4人を1組と考えると，その1組と残り2人の並び方は　$3!$ 通り

よって，並び方の総数は

$2! \times {}_4P_2 \times 3! = 2 \times 12 \times 6 = 144$（通り）

[B]　条件に当てはまる「間に入る人数」を，すべて場合分けして考える。

(ii) A，Bの間に3人のみ入るとき

A，Bの並び方は　$2!$ 通り　A○○○B○

A，Bの間に入る3人の並び方は　${}_4P_3$ 通り

A，Bとその間に入る3人の5人を1組と考えると，その1組と残り1人の並び方は　$2!$ 通り

よって，並び方の総数は

$2! \times {}_4P_3 \times 2! = 2 \times 24 \times 2 = 96$（通り）

(iii) A，Bの間に4人が入るのは，A，Bが両端にくる並び方であるから　48（通り）

(i)～(iii)より，求める並び方の総数は

$144 + 96 + 48 = 288$（通り）

（別解）　[C]

A，B，C，D，E，F の 6 人の並び方の総数は

$6! = 720$（通り）

このうち，A，B の間に 2 人以上入らないのは，次の(i)，(ii)のとき

(i)　A，B が隣り合うとき

(ii)　A，B の間に 1 人のみ入るとき

(i)のとき　[A][B]○○○○

A，B の並び方は　$2!$ 通り

A，B を 1 組として考えると，その 1 組と残り 4 人の並び方は　$5!$ 通り

よって，並び方の総数は

$2! \times 5! = 2 \times 120 = 240$（通り）

(ii)のとき　[A]○[B]○○○

A，B の並び方は　$2!$ 通り

A，B の間に入る 1 人の選び方は　4 通り

A, B とその間に入る 1 人の 3 人を 1 組と考えると，その 1 組と残り 3 人の並び方は　$4!$ 通り

よって，並び方の総数は

$2! \times 4 \times 4! = 2 \times 4 \times 24 = 192$（通り）

(i)，(ii)より，求める並び方の総数は

$720 - (240 + 192) = 288$（通り）

[C]　すべての並び方の総数から，条件に当てはまらないものの総数を除いて求める。

2 **[正解]** カキ：20

[解説]

3 の倍数となるのは，各位の数の和が 3 の倍数となるときである。その 3 つの数の組合せは

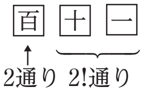
(0，2，4)，(0，4，8)，
(2，4，6)，(4，6，8)

の 4 通りである。このうち

(i)　0 を含むもの(2 組) [D]

[D]　0 は最高位にできない。

百の位は 0 以外の数であるから，できる整数の個数は



$2\times2!=4$（個）

(ii)　0 を含まないもの(2 組)

できる整数の個数は　$3!=6$（個）

(i)，(ii)より，求める整数の個数は

$4\times2+6\times2=$ **20**（個）

3 **[正解]** クケ：35

[解説]

684 より小さい整数について，

(i)　百の位が 2 または 4 のとき [E]

十, 一の位は残り 4 つの数から 2 つ取る順列で

$_4P_2$ 通り

よって，できる整数の個数は

$_4P_2 \times 2 = 12 \times 2 = 24$ (個)

(ii)　百の位が 6, 十の位が 0 または 2 または 4 のとき

一の位は残り 3 つの数から 1 つ選ぶ 3 通り

よって，できる整数の個数は

$3 \times 3 = 9$ (個)

(iii)　百の位が 6，十の位が 8 のとき

一の位は 0 または 2 であるから 2 通り

よって，できる整数の個数は 2 個

(i)～(iii)より，求める整数の個数は

$24 + 9 + 2 = \mathbf{35}$ (個)

[E]　最高位から考える。

第 2 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：8

[解説]

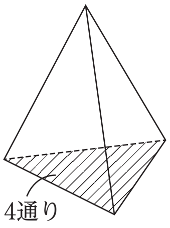
底面の正三角形の塗り方は [A]

　　4 通り

このそれぞれに対して，側面の塗り方は，異なる 3 色の円順列で

　　$(3-1)!=2!=2$（通り）[B]

よって，求める塗り方は　$4\times2=8$（通り）



[A]　正 n 角錐は，底面を固定し，側面の塗り方を「円順列」で考える。

[B]　異なる n 個のものの円順列の総数
$\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$

2

[正解] イウ：20

[解説]

2 つの正三角形の面を上面と下面とする。

上面と下面の塗り方は [C]

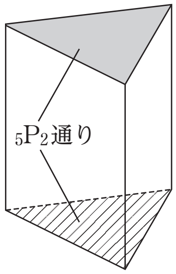
　　${}_5P_2=5\cdot4=20$（通り）

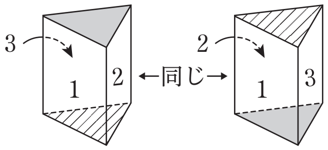
このそれぞれに対して，側面の塗り方は，異なる 3 個の円順列において，上下をひっくり返すと一致するものが 2 つずつあるから

$$\frac{(3-1)!}{2}=\frac{2!}{2}=1 \text{（通り）}$$ [D]

よって，求める塗り方は

　　$20\times1=20$（通り）





[C]　正 n 角柱は，上面・下面を固定し，側面の塗り方を「じゅず順列」で考える。

[D]　異なる n 個のもののじゅず順列の総数
$\dfrac{(n-1)!}{2}$

3 **[正解]** エ：4

[解説]

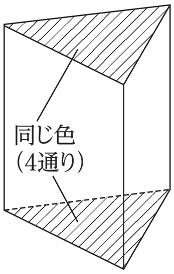
2 つの正三角形の面を上面と下面とする。

異なる 4 色すべてを使って 5 面を塗るので，2 つの面が同じ色となる。

また，隣り合った面は異なるように塗ることから，同じ色は上面と下面に塗ることとなる。

この 2 面の塗り方は

4 通り

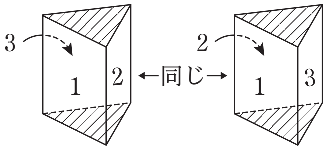


このそれぞれに対して，側面の塗り方は，異なる 3 個の円順列において，上下をひっくり返すと一致するものが 2 つずつあるから

$$\frac{(3-1)!}{2}=\frac{2!}{2}=1\ (\text{通り})$$ [D]

よって，求める塗り方は

$4\times1=4$（通り）



第 2 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] アイウ：126，**エオ**：63，**カキクケ**：1806

[解説]

(1)　7 人をそれぞれ A，B のどちらかに分ける方法は

$2^7=128$（通り）[A]

このうち，0 人の組ができるのは，7 人全員を A，B の一方だけに入れる場合で

2 通り

よって，求める分け方は　$128-2=\mathbf{126}$（通り）

(2)　(1)において A，B の区別をなくして

$126\div 2!=\mathbf{63}$（通り）[B]

(3)　7 人をそれぞれ A，B，C のいずれかに分ける方法は　$3^7=2187$（通り）

このうち，0 人の組ができるのは次の 2 つの場合がある。

(i)　0 人の組が 2 つのとき，すなわち 7 人全員を A，B，C いずれか 1 つだけに入れる場合

3 通り

(ii)　0 人の組が 1 つのとき，すなわち 7 人全員を 2 組のみに入れる場合

0 人の組の選び方　3 通り

残りの 2 組がどの組も 1 人以上になるような分け方は，(1)より　126 通り

よって　$3\times 126=378$（通り）

(i)，(ii)より，求める分け方は

$2187-(3+378)=\mathbf{1806}$（通り）

[A]　1 個目，2 個目，……，r 個目のすべてにおいて，それぞれ n 通りの選び方があるとき，その選び方の総数は n^r 通りある。

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{個}}=n^r$$

これは，異なる n 個のものから，重複を許して r 個を取り出して並べる順列の総数であり，n 個から r 個取る「重複順列」という。

[B]　区別をなくして n 組の分け方の総数を求めるときは，区別がある場合の総数を，$n!$ で割る。

第 3 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：③，ウ：①

[解説]

${}_n\mathrm{C}_r$ は，**異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶ組合せの総数である。**

異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶ組合せの総数は，**異なる n 個のものから残す $n-r$ 個を選ぶ組合せの総数と等しい。** [A]

${}_n\mathrm{C}_{n-r}$ は，異なる n 個のものから残す $n-r$ 個を選ぶ組合せの総数を表すから，${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ が成り立つ。

[A]　残す $n-r$ 個を選べば，自動的に r 個を選ぶことになる（残さない方として r 個を選ぶことにほかならない）。

2

[正解] エ：③，オ：③，カ：⑦

[解説]

異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶことは，次の 2 つの場合に分けられる。

(i)　**ある特定の 1 個を選ぶ場合**

(ii)　ある特定の 1 個を選ばない場合 [B]

(i)は，**残り $n-1$ 個から $r-1$ 個を選ぶ場合である**から

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

(ii)は，**ある特定の 1 個を除く $n-1$ 個から r 個を選ぶ場合であるから**

$${}_{n-1}\mathrm{C}_r$$

(i)，(ii)は同時に起こらないから，和の法則により，

${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$ が成り立つ。

[B]　例えば，1，2，……，n の番号のついたカードから，r 枚を選ぶとき，次の 2 つの場合に分ける。

(i)　1 のカードを含む

(ii)　1 のカードを含まない

(i)は，1 のカード以外の $r-1$ 枚を，残りの $n-1$ 枚から選ぶ場合の数であるから

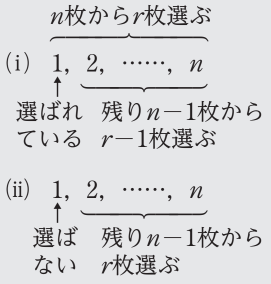
$${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

(ii)は，1 のカードを含まない r 枚を，残りの $n-1$ 枚から選ぶ場合の数であるから

$${}_{n-1}\mathrm{C}_r$$

(i)，(ii)から和の法則により

$${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$$



3 [正解] キクケ：105

[解説]

7人から4人を選び，残った3人から2人選ぶと，残りの1人は自動的に決まる。

よって，分け方の総数は

$${}_7C_4 \times {}_3C_2 = 35 \times 3 = \mathbf{105}\text{（通り）}$$ [C]

> [C]　各組の人数が異なるから，組は区別できる。

4 [正解] コサシ：350

[解説]

4組に入る人数を a 人，b 人，c 人，d 人（$a \leqq b \leqq c \leqq d$）とし，$(a, b, c, d)$ のように表すと

$(1, 1, 1, 4)$，$(1, 1, 2, 3)$，
$(1, 2, 2, 2)$

の場合がある。

(i)　$(1, 1, 1, 4)$ のとき

$$\frac{{}_7C_1 \times {}_6C_1 \times {}_5C_1}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35\text{（通り）}$$

[D]

> [D]　同じ人数の組は区別ができない。区別できない組が n 組ある場合，まず区別して組分けを行い，$n!$ で割る。

(ii)　$(1, 1, 2, 3)$ のとき

$$\frac{{}_7C_1 \times {}_6C_1 \times {}_5C_2}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 10}{2} = 210\text{（通り）}$$

[D]

(iii)　$(1, 2, 2, 2)$ のとき

$$\frac{{}_7C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2}{3!} = \frac{7 \times 15 \times 6}{6} = 105\text{（通り）}$$

[D]

(i)〜(iii)より，分け方の総数は

$$35 + 210 + 105 = \mathbf{350}\text{（通り）}$$

第３講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイウ：354

[解説]

internet の 8 文字には，e，n，t が 2 個ずつ，i，r が 1 個ずつ含まれている。 [A]

選ぶ 4 文字について，以下の場合がある。

(i)　同じ文字 2 個を 2 組含む場合　□□○○ [B]

使う文字の種類は e, n, t から 2 種類選ぶ方法で

$${}_3C_2=3\text{（通り）}$$

選んだ文字に対する順列の総数は

$$\frac{4!}{2!2!}=6\text{（通り）}$$

よって，この場合の総数は　$3\times6=18$（通り）

(ii)　同じ文字 2 個を 1 組のみ含む場合　□□○△

使う文字の種類は，e，n，t から 1 種類選び，それを 2 個使う文字とし，e，n，t のうち選ばなかった 2 種類と i，r の 2 種類の計 4 種類から 2 種類選ぶ方法で　${}_3C_1\times{}_4C_2=18$（通り）

選んだ文字に対する順列の総数は

$$\frac{4!}{2!}=12\text{（通り）}$$

よって, この場合の総数は　$18\times12=216$（通り）

(iii)　すべて異なる文字の場合　□○△◇

e，n，t，i，r の 5 種類から 4 種類選んで並べる方法で　${}_5P_4=120$（通り）

(i)～(iii)より，求める順列の総数は

$$18+216+120=\mathbf{354}\text{（通り）}$$

[A]　同じものを含む順列
n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，……がそれぞれ同じものであるとき，これら n 個のものすべてを 1 列に並べる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$$

ただし　$p+q+r+\cdots\cdots=n$

[B]　4 文字だけ使うから，同じものをいくつ含むかで場合分けをする。

2 **[正解]** **エオカ**：150，**キク**：60，**ケコサ**：272

[解説]

右へ１区画進むことを→，上へ１区画進むことを↑と表す。

(1)　P から A までの最短経路は→４個，↑２個の順列で表され，A から Q までの最短経路は→２個，↑３個の順列で表される。

よって，求める経路の総数は

$$\frac{6!}{4!2!}\times\frac{5!}{2!3!}=15\times10=\mathbf{150}\ (\text{通り})$$

(2)　P から B までの最短経路は

$$\frac{5!}{3!2!}\times1=10\ (\text{通り})$$

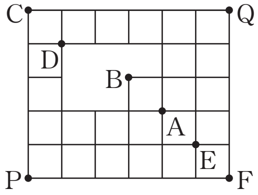
B から Q までの最短経路は

$$1\times\frac{4!}{2!2!}=6\ (\text{通り})$$

よって，求める経路の総数は

$$10\times6=\mathbf{60}\ (\text{通り})$$

(3)　右図のように点 C，D，E，F を定めると，P から Q までの最短経路は，[C]



A, B, C, D, E, F 地点のいずれかを通る場合に分けられる。

C 地点を通る経路は　$1\times1=1$（通り）

D 地点を通る経路は

$$\frac{5!}{1!4!}\times\frac{6!}{5!1!}=5\times6=30\ (\text{通り})$$

E 地点を通る経路は

$$\frac{6!}{5!1!}\times\frac{5!}{1!4!}=6\times5=30\ (\text{通り})$$

F 地点を通る経路は　$1\times1=1$（通り）

よって，求める経路の総数は

$$150+60+1+30+30+1=\mathbf{272}\ (\text{通り})$$

[C]　与えられた経路図では通れない領域があるから，左の図のように斜めに点をとって場合分けをすればよい。

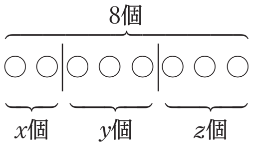
第 3 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] アイ：45

[解説]

8 個の○と 2 本の｜(仕切り)を並べ，｜で区切られた 3 カ所にある○の個数を左から順に整数 x, y, z の値とすればよい。



よって，求める組数は

$$\frac{10!}{8!2!}={}_{10}C_2=45\text{（組）}$$ [A]

> [A]　同じものを含む順列
> n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，……がそれぞれ同じものであるとき，これら n 個のものすべてを 1 列に並べる順列の総数は
> $$\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$$
> ただし　$p+q+r+\cdots\cdots=n$

2 [正解] ウエ：21

[解説]

$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とすると，

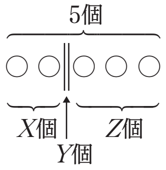
$x=X+1$，$y=Y+1$，$z=Z+1$ より

$$x+y+z=8$$
$$\Longleftrightarrow (X+1)+(Y+1)+(Z+1)=8$$
$$\Longleftrightarrow X+Y+Z=5$$

x，y，z は自然数であるから

$$x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1$$
$$\Longleftrightarrow X+1 \geqq 1,\ Y+1 \geqq 1,\ Z+1 \geqq 1$$
$$\Longleftrightarrow X \geqq 0,\ Y \geqq 0,\ Z \geqq 0$$

よって，求める組数は，5 個の○と 2 本の |（仕切り）の順列の総数であるから

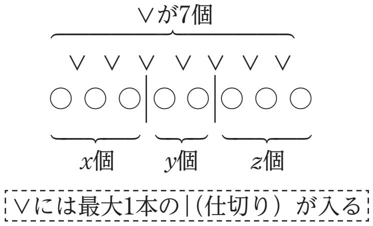


$$\frac{7!}{5!2!}={}_7C_2=\mathbf{21}\ (組)$$

（別解）

8 個の○の間 7 カ所のうち，いずれか 2 カ所に |（仕切り）を 1 本ずつ入れ，区切られた 3 カ所にある○の個数を左から順に自然数 x, y, z の値とすればよい。

よって，求める組数は　${}_7C_2=\mathbf{21}$（組）[B]



[B]　7カ所のうちから，2カ所を選ぶ組合せとして読みかえる。

3 [正解] オカ：35

[解説]

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 の 7 個の数から異なる 4 個を選び，それを小さい順に a，b，c，d とすればよい。[C]

よって，求める組数は　${}_7C_4=\mathbf{35}$（組）

[C]　組合せとして読みかえる。

4 **[正解]** キクケ：210

[解説]

1，2，3，4，5，6，7 の 7 個の数から重複を許して 4 個を選び，それを小さい順に a，b，c，d とすればよい。[D]

よって，求める組数は，4 個の○と 6 本の｜(仕切り) の順列の総数で

$$\frac{10!}{4!6!} = {}_{10}C_4 = \mathbf{210}\ (組)$$

(別解)

整数 a，b，c，d において

$$a \leqq b \leqq c \leqq d$$

$$\Longleftrightarrow a < b+1 < c+2 < d+3$$

ここで，$a = A$，$b+1 = B$，$c+2 = C$，$d+3 = D$ とおくと

$$1 \leqq A < B < C < D \leqq 10,$$

$$A \geqq 1,\ B \geqq 1,\ C \geqq 1,\ D \geqq 1$$

これを満たす $(A,\ B,\ C,\ D)$ の組数は，1 ～ 10 の 10 個の数から異なる 4 個を選び，それを小さい順に A，B，C，D とすればよいから

$${}_{10}C_4 = 210\ (組)$$

求める $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組数は，$(A,\ B,\ C,\ D)$ の組数と等しいから　**210** 組

[D]　重複組合せ
異なる n 個 (n 種類) のものから，重複を許して r 個取る組合せを，n 個から r 個取る「重複組合せ」といい，
　r 個の○と ($n-1$) 個の｜（仕切り）の順列（同じものを含む順列）
として扱えばよい。

第4講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] アイ：62

[解説]

(i)　同じ色を3枚含む場合　□□□○

赤3枚と，青1枚または白1枚を選ぶから選び方は

2通り

それぞれについて並べ方は　$\dfrac{4!}{3!}=4$（通り）[A]

よって，この場合の並べ方は　$2\times4=8$（通り）

(ii)　同じ色2枚を2組含む場合　□□○○

赤，青，白から2色を選ぶから色の選び方は

$_3C_2=3$（通り）

それぞれについて並べ方は　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$（通り）

よって，この場合の並べ方は　$3\times6=18$（通り）

(iii)　同じ色2枚を1組のみ含む場合　□□○△

赤，青，白から2枚使うものを1色選び，残り2色とも使うから色の選び方は　$_3C_1=3$（通り）

それぞれについて並べ方は　$\dfrac{4!}{2!}=12$（通り）

よって，この場合の並べ方は　$3\times12=36$（通り）

(i)～(iii)より，求める並べ方の総数は

$8+18+36=$ **62**（通り）

[A]　同じものを含む順列

n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，……がそれぞれ同じものであるとき，これら n 個のものすべてを1列に並べる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$$

ただし　$p+q+r+\cdots\cdots=n$

2 [正解] ウ：1，エ：7

[解説]

赤 3 枚を A_1，A_2，A_3，青 2 枚を B_1，B_2，白 2 枚を C_1，C_2 とし，すべて区別して考える。 [B]

これら 7 枚から 4 枚を選んで 1 列に並べる方法は

　　${}_7P_4$ 通り

青が隣り合うためには，B_1，B_2 を 4 枚の中に含む必要がある。

B_1，B_2 を選ぶとき，残り A_1，A_2，A_3，C_1，C_2 の 5 枚の中から 2 枚を選ぶ方法が　${}_5C_2$ 通り

選んだ 4 枚を，B_1，B_2 が隣り合うように並べる方法について

　　B_1，B_2 を 1 組として並べる方法が　$3!$ 通り

　　B_1，B_2 の並べ方は　$2!$ 通り

したがって，求める確率は

$$\frac{{}_5C_2\times 3!\times 2!}{{}_7P_4}=\frac{5\cdot 4\times 3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1}{2\cdot 1\times 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}=\mathbf{\frac{1}{7}}$$

[B]　全事象 U の根元事象が同様に確からしいとき，事象 A の確率 $P(A)$ は

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}$$

$$=\frac{(\text{事象}A\text{の起こる場合の数})}{(\text{起こりうるすべての場合の数})}$$

根元事象が同様に確からしいものとするため，同じものでも区別するとよい。

第 4 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：4

[解説]

3 枚のカードの取り出し方は　${}_{12}C_3=220$（通り）

6 のカードを取り出すとき，残り 11 枚から 2 枚を取り出す方法が　${}_{11}C_2=55$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_3}=\dfrac{55}{220}=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$ [A]

[A]　全事象 U の根元事象が同様に確からしいとき，事象 A の確率 $P(A)$ は

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}$$

$$=\frac{(\text{事象}A\text{の起こる場合の数})}{(\text{起こりうるすべての場合の数})}$$

2

[正解] ウエ：41，オカ：55

[解説]

3 枚のカードの取り出し方は　${}_{12}C_3=220$（通り）

最大の数字が 9 以上になるのは，最大の数字が 9，10，11，12 のいずれかの場合である。

(i)　最大の数字が 9 のとき，1 から 8 までの 8 枚から 2 枚を取り出す方法が　${}_8C_2$　通り

(ii)　最大の数字が 10 のとき，1 から 9 までの 9 枚から 2 枚を取り出す方法が　${}_9C_2$　通り

(iii)　最大の数字が 11 のとき，1 から 10 までの 10 枚から 2 枚を取り出す方法が　${}_{10}C_2$　通り

(iv)　最大の数字が 12 のとき，1 から 11 までの 11 枚から 2 枚を取り出す方法が　${}_{11}C_2$　通り

(i)～(iv)より，求める確率は

$$\frac{{}_8C_2}{{}_{12}C_3}+\frac{{}_9C_2}{{}_{12}C_3}+\frac{{}_{10}C_2}{{}_{12}C_3}+\frac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_3}$$

$$=\frac{28+36+45+55}{220}$$ [B]

$$=\frac{164}{220}=\mathbf{\frac{41}{55}}$$

[B]　事象 A，B が互いに排反であるとき

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

（確率の加法定理）

（別解）

最大の数字が 9 以上である事象は，最大の数字が 8

以下である事象 A の余事象 $\overline{A}$ である。

事象 A は１から８までの８枚から３枚を取り出す場合で　${}_8C_3$　通り

よって，求める確率は

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{{}_8C_3}{{}_{12}C_3}=1-\frac{56}{220}$$

$$=\mathbf{\frac{41}{55}}$$ [C]

> [C]　余事象の確率
> $P(\overline{A})=1-P(A)$

3 [正解] キ：5，クケ：11

[解説]

３枚のカードの取り出し方は　${}_{12}C_3=220$（通り）

３を取り出すとき，残り11枚から２枚を取り出す方法が　${}_{11}C_2$ 通り

４を取り出すとき，残り11枚から２枚を取り出す方法が　${}_{11}C_2$ 通り

３と４を取り出すとき，残り10枚から１枚を取り出す方法が　${}_{10}C_1$ 通り

よって，求める確率は

$$\frac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_3}+\frac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_3}-\frac{{}_{10}C_1}{{}_{12}C_3}=\frac{55+55-10}{220}$$

$$=\frac{100}{220}=\mathbf{\frac{5}{11}}$$ [D]

> [D]　事象 A，B が互いに排反でないとき
> $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

（別解）

３または４のカードを取り出す事象は，３も４も取り出さない事象 B の余事象 $\overline{B}$ である。

事象 B は３も４も取り出さない，つまり，３と４以外の10枚から３枚を取り出すときで　${}_{10}C_3$ 通り

よって，求める確率は

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{{}_{10}C_3}{{}_{12}C_3}=1-\frac{120}{220}=\mathbf{\frac{5}{11}}$$

[C]

第 4 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：8，イウ：27

[解説]

3 個のさいころの目の出方は　6^3 通り

最小値が 3 以上であるのは，出る目がすべて 3 以上，

すなわち，すべて 3 ～ 6 の目が出る場合で　4^3 通り

[A]

よって，求める確率は　$\dfrac{4^3}{6^3}=\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{27}}$

[A]
（最小値が k 以上の確率）
＝（すべて k 以上の確率）

2

[正解] エ：7，オカ：24

[解説]

3 個のさいころの目の出方は　6^3 通り

最小値が 3 以上 5 以下であるのは，出る目がすべて 3 以上の場合から，出る目がすべて 6 の場合を除いた場合である。 [B]

出る目がすべて 3 以上，すなわち，すべて 3 ～ 6 の目が出る場合は　4^3 通り

出る目がすべて 6 の場合は　1^3 通り

よって，求める確率は

$$\frac{4^3}{6^3}-\frac{1^3}{6^3}=\frac{64-1}{216}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{24}}$$

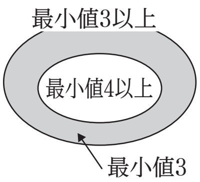
[B]
（最小値が m 以上 n 以下の確率）
＝（最小値が m 以上の確率）
－（最小値が $n+1$ 以上の確率）

3 **[正解]** キク：37，ケコサ：216

[解説]

3 個のさいころの目の出方は　6^3 通り

最小値が 3 であるのは，出る目がすべて 3 以上の場合から，出る目がすべて 4 以上の場合を除いた場合である。 [C]



出る目がすべて 3 以上，すなわち，すべて 3 ～ 6 の目が出る場合は　4^3 通り

出る目がすべて 4 以上，すなわち，すべて 4 ～ 6 の目が出る場合は　3^3 通り

よって，求める確率は

$$\frac{4^3}{6^3}-\frac{3^3}{6^3}=\frac{64-27}{216}=\mathbf{\frac{37}{216}}$$

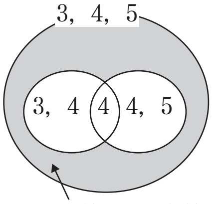
[C]
（最小値が m の確率）
＝（最小値が m 以上の確率）
－（最小値が $m+1$ 以上の確率）

4 [正解] シ：1，スセ：18

[解説]

3 個のさいころの目の出方は　6^3 通り

最小値が 3，最大値が 5 であるのは，出る目がすべて 3，4，5 の場合から，3 または 5 が出ない場合を除いた場合である。



出る目がすべて 3，4，5 の場合は　3^3 通り

このうち

3 が出ないのは，出る目がすべて 4，5 の場合で

2^3 通り

5 が出ないのは，出る目がすべて 3，4 の場合で

2^3 通り

3 も 5 も出ないのは，出る目がすべて 4 の場合で

1^3 通り

よって，求める確率は

$$\frac{3^3}{6^3}-\left(\frac{2^3}{6^3}+\frac{2^3}{6^3}-\frac{1^3}{6^3}\right)=\frac{27-(8+8-1)}{216} \quad \text{[D]}$$

$$=\frac{12}{216}=\boldsymbol{\frac{1}{18}}$$

[D]　（　）内は，次の「和事象の確率」を用いている。
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

第5講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：8，イウ：81

[解説]

さいころ1個を投げて3以上の目が出る確率は

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

2以下の目が出る確率は

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

3以上の目が x 回，2以下の目が y 回出たとすると，

点Pは左回りに $4x-y$ だけ進む。[A]

また，さいころを4回投げるから　$x+y=4$

よって，点Pは左回りに

$$4x-(4-x)=5x-4$$

だけ進む。

$0\leqq x\leqq 4$ より，$-4\leqq 5x-4\leqq 16$ であるから，点Pが点Bにあるのは

$$5x-4=1,\ 7,\ 13$$

のときである。

x は整数より　$x=1$

よって，求める確率は

$$_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{4\cdot 2}{3^4}=\frac{8}{81}$$ [B]

[A]　数直線上の点や図形上の頂点を動く動点の問題で反復試行の確率を用いるときは，事象が起こる回数を x，y などとおき，移動量を文字で表して考える。

[B]　反復試行の確率
1回の試行で事象 A が起こる確率を p とすると，事象 A がちょうど r 回起こる確率は
$${}_nC_r\,p^r(1-p)^{n-r}$$
ただし $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$

2 **[正解]** **エオカ**：142，**キクケコ**：2187

[解説]

さいころ 1 個を投げて 3 以上の目が出る確率は　$\dfrac{2}{3}$

2 以下の目が出る確率は　$\dfrac{1}{3}$

3 以上の目が x 回，2 以下の目が y 回出たとすると，

点 P は左回りに $4x-y$ だけ進む。 [A]

また，さいころを 7 回投げるから　$x+y=7$

よって，点 P は左回りに

$$4x-(7-x)=5x-7$$

だけ進む。

$0\leqq x\leqq 7$ より，$-7\leqq 5x-7\leqq 28$ であるから，点

P が点 E にあるのは

$$5x-7=-2,\ 4,\ 10,\ 16,\ 22,\ 28$$

のときである。

x は整数より　$x=1,\ 7$

よって，求める確率は

$${}_7C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^6+\left(\frac{2}{3}\right)^7=\frac{7\cdot 2+2^7}{3^7}$$ [B]

$$=\frac{14+128}{2187}$$

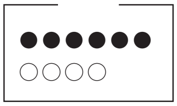
$$=\mathbf{\frac{142}{2187}}$$

第 5 講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：5，イ：9

[解説]

1 番目に取り出した玉が黒である事象を A，3 番目に取り出した玉が黒である事象を B とする。



事象 A が起こる確率 $P(A)$ は

$$P(A)=\frac{6}{6+4}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$A\cap B$ は，1 番目から順に黒，黒，黒，または，黒，白，黒と出る場合であるから

$$P(A\cap B)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}$$

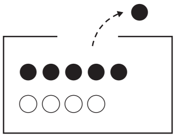
$$=\frac{2\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8}=\frac{1}{3}$$

よって，求める確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{3}\div\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{5}{9}}$$ [A]

(別解)

1 番目に黒玉を取り出したとき，残りの玉は黒玉 5 個，白玉 4 個である。 [B]



ここから，次の 2 回で順に黒，黒，または，白，黒が出ればよい。

よって，求める確率は

$$P_A(B)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\mathbf{\frac{5}{9}}$$

[A]　条件付き確率
事象 A が起こったときに，事象 B が起こる確率（条件付き確率）$P_A(B)$ は

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

[B]　事象 A が起こったあとの状態が明確なときは，その状態から事象 B が起こる場合を考え，$P_A(B)$ を求めるとよい。

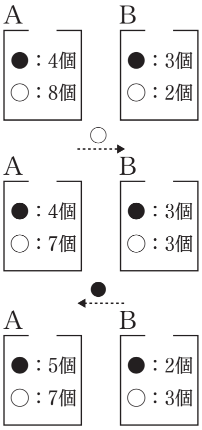
2 **[正解]** ウ：1，エ：3，オ：1，カ：9，キ：5，ク：9

[解説]

(1)　A の黒玉の数が増加するのは，A から白玉を取り出し，B から黒玉を取り出すときである。

よって，求める確率は

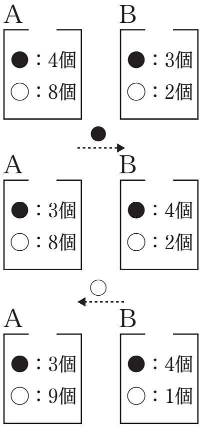
$$\frac{8}{12}\times\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$ [C]



(2)　A の黒玉の数が減少するのは，A から黒玉を取り出し，B から白玉を取り出すときである。

よって，求める確率は

$$\frac{4}{12}\times\frac{2}{6}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$ [C]

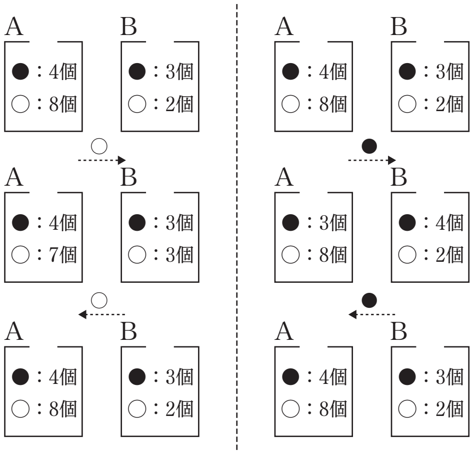


(3)　A の黒玉の数が変わらないのは，A から取り出した玉の色と B から取り出した玉の色が同じときである。

よって，求める確率は

$$\frac{8}{12}\times\frac{3}{6}+\frac{4}{12}\times\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{5}{9}}$$ [C]

[C]　確率の乗法定理
$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$



(別解)

A の黒玉の数が変わらないのは，(1)，(2)以外のときである。

よって，求める確率は　$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{5}{9}$

第 5 講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：8

[解説]

1 回目と 2 回目の出る目の組み合わせそれぞれに対する合計点を表にすると，次のようになる。

2回目＼1回目	1	2	3	4	5	6
1	4	4	6	6	8	8
2	4	4	6	6	8	8
3	6	6	8	8	10	10
4	6	6	8	8	10	10
5	8	8	10	10	12	12
6	8	8	10	10	12	12

よって，合計点のとりうる値は

4 点，6 点，8 点，10 点，12 点

それぞれの値をとる確率は

4 点のとき　$\dfrac{4}{6^2}$

6 点のとき　$\dfrac{8}{6^2}$

8 点のとき　$\dfrac{12}{6^2}$

10 点のとき　$\dfrac{8}{6^2}$

12 点のとき　$\dfrac{4}{6^2}$

よって，求める期待値は ◀[A]

$$4\times\frac{4}{6^2}+6\times\frac{8}{6^2}+8\times\frac{12}{6^2}+10\times\frac{8}{6^2}+12\times\frac{4}{6^2}$$

$$=\frac{1}{36}(4\cdot4+6\cdot8+8\cdot12+10\cdot8+12\cdot4)=8$$

[A]　期待値

変量 X のとりうる値を x_1，x_2，……，x_n とし，X がこれらの値をとる確率をそれぞれ p_1，p_2，……，p_n とすると，X の期待値 E は

$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

第 6 講　PART1　確認問題 解答

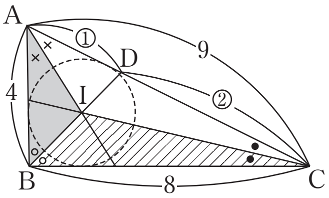
1　**[正解]** ア：1，イ：2，ウ：3，エ：7，オ：1，
カ：7

[解説]

(1)　BD は ∠B の二等分線であるから [A]

$$AD : DC = BA : BC = 4 : 8 = 1 : 2$$ [B]

よって　$\triangle BAI : \triangle BCI = AD : DC = \mathbf{1 : 2}$ [C]



（別解）

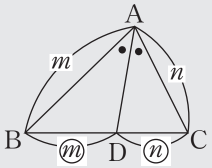
△BAI，△BCI の底辺を，それぞれ BA，BC とすると，高さはともに内接円の半径であるから等しい。

よって

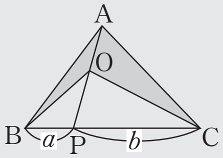
$$\triangle BAI : \triangle BCI = BA : BC$$
$$= 4 : 8 = \mathbf{1 : 2}$$

［A］　三角形の内心は，3 つの内角の二等分線の交点。

［B］　角の二等分線の性質
△ABC において，AD が ∠A の二等分線のとき　BD : DC＝AB : AC



［C］　三角形の面積と線分の比



$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OAC} = \frac{BP}{CP} = \frac{a}{b}$$

(2)　(1)より　$AD=\frac{1}{3}AC=\frac{1}{3}\cdot 9=3$

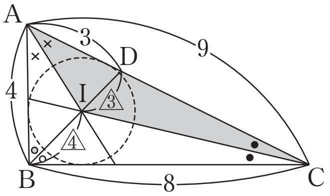
AI は $\angle A$ の二等分線であるから

$$BI:ID=AB:AD=4:3$$

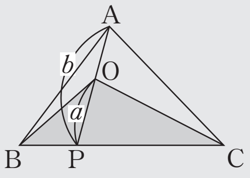
よって

$$\triangle AIC:\triangle ABC=ID:BD$$ [D]

$$=3:(3+4)=\mathbf{3:7}$$



[D]　三角形の面積と線分の比



$$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{OP}{AP}=\frac{a}{b}$$

（別解）

△BAI，△BCI，△AIC の底辺を，それぞれ AB，BC，AC とすると，高さはすべて内接円の半径であるから等しい。

よって

$$\triangle BAI:\triangle BCI:\triangle AIC=AB:BC:AC$$

$$=4:8:9$$

したがって

$$\triangle AIC:\triangle ABC=9:(4+8+9)$$

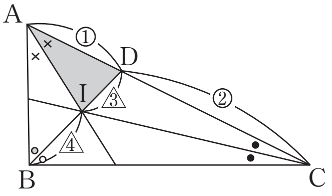
$$=9:21=\mathbf{3:7}$$

(3)　$\triangle AID=\frac{ID}{BD}\triangle ABD=\frac{3}{7}\triangle ABD$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{AD}{AC}\triangle ABC=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}\triangle ABC$$

$$=\frac{1}{7}\triangle ABC$$

よって　$\triangle AID:\triangle ABC=\mathbf{1:7}$



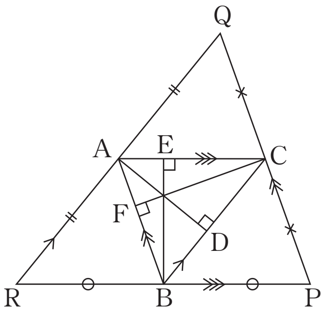
第 6 講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②，イ：②，ウ：①，エ：③，
オ：②，カ：③，キ：①，ク：③

[解説]

△ABC の頂点 A，B，C を通り，それぞれの対辺に平行な直線の交点を下図のように P，Q，R とする。 [A]

[A]　三角形の外心は，3 つの辺の垂直二等分線の交点である。
△ABC の 3 つの頂点から下ろした垂線が，△PQR の 3 つの辺の垂直二等分線であることを示せばよい。



AB // QC，AQ // BC より，四角形 ABCQ は**平行四辺形**であるから

AQ ＝ **BC**

同様に，四角形 ACBR は平行四辺形であるから

AR ＝ BC

ゆえに　AQ ＝ AR

よって，点 A は**辺 QR の中点**である。

また，AD ⊥ BC かつ BC // RQ であるから

AD ⊥ RQ

よって，AD は**辺 QR の垂直二等分線**である。

同様に，BE は**辺 RP の垂直二等分線**，CF は**辺 PQ の垂直二等分線**である。

よって，△ABC の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線 AD，BE，CF は，△PQR の**外心**において 1 点で交わる。

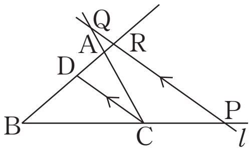
第6講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤，イ：①，ウ：⑤

[解説]

点Cを通り直線 l に平行な直線を引き，直線ABとの交点をDとすると



PR // CD より　$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{\mathbf{BR}}{\mathbf{RD}}$　……(＊)　[A]

RQ // CD より　$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{\mathbf{DR}}{\mathbf{RA}}$　……(＊＊)

(＊)，(＊＊)の両辺をそれぞれ掛けると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=\frac{BR}{RD}\cdot\frac{DR}{RA}$$

この両辺に $\dfrac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}}$ を掛けると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BR}{RD}\cdot\frac{DR}{RA}\cdot\frac{AR}{RB}$$

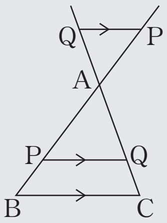
この右辺は

$$\frac{BR}{RD}\cdot\frac{DR}{RA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

であるから

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

[A]　平行線と線分の比
下図において，PQ // BC のとき
AP : AB = AQ : AC
　　　 = PQ : BC
AP : PB = AQ : QC

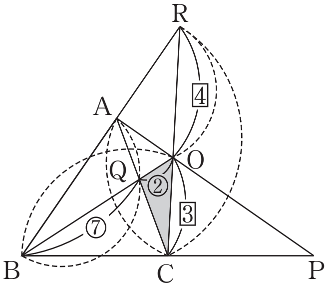


2 [正解] エ：4，オ：5

[解説]

△OQC と直線 BR について，メネラウスの定理により [B]

$$\frac{OB}{BQ}\cdot\frac{QA}{AC}\cdot\frac{CR}{RO}=1$$



すなわち

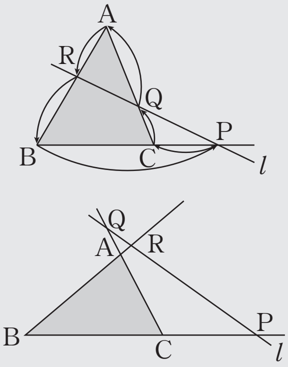
$$\frac{2+7}{7}\cdot\frac{QA}{AC}\cdot\frac{3+4}{4}=1$$

よって　$\frac{QA}{AC}=\frac{4}{9}$

したがって　AQ：QC＝**4：5**

[B]　メネラウスの定理

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



第 7 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：1，ウ：8，エ：3

[解説]

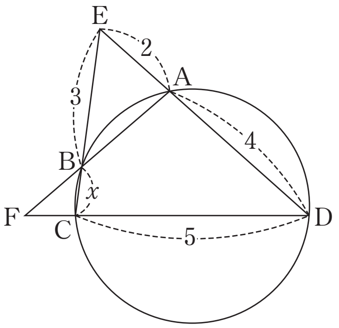
(1)　方べきの定理より

$$\mathrm{EA}\cdot\mathrm{ED}=\mathrm{EB}\cdot\mathrm{EC}$$ [A]

$\mathrm{BC}=x$ とすると，$\mathrm{EC}=\mathrm{EB}+\mathrm{BC}=3+x$ より

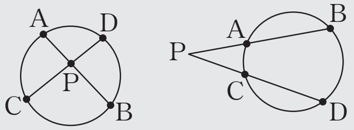
$$2\cdot(2+4)=3\cdot(3+x)$$

よって　$x=1$　すなわち　$\mathrm{BC}=\mathbf{1}$



[A]　方べきの定理

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$$



(2)　△CDE と直線 AF にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BE}}\cdot\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{AD}}=1$$ [B]

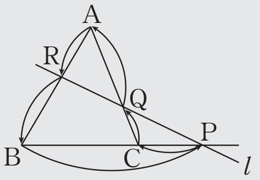
$$\frac{5+\mathrm{CF}}{\mathrm{CF}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}=1$$

よって　$5+\mathrm{CF}=6\mathrm{CF}$

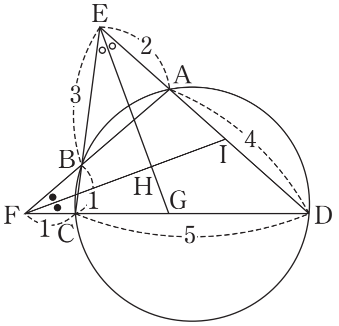
ゆえに　$\mathrm{CF}=\mathbf{1}$

[B]　メネラウスの定理

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$



(3)



△CDE において，角の二等分線の性質より

$$CG : GD = EC : ED = 4 : 6 = 2 : 3$$ [C]

よって　$CG = \frac{2}{2+3}CD = \frac{2}{5}\cdot 5 = 2$

ここで，△FDA ∽ △FBC であるから

$$FA : FC = AD : CB$$

$FA : 1 = 4 : 1$　　ゆえに　$FA = 4$

よって，△FDA において，角の二等分線の性質より

$$AI : ID = FA : FD = 4 : 6 = 2 : 3$$ [C]

ゆえに　$AI = \frac{2}{2+3}AD = \frac{2}{5}\cdot 4 = \frac{8}{5}$

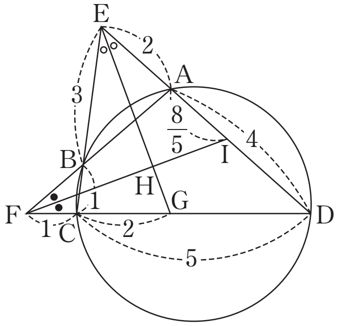
したがって，△FDI と直線 EG にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{DE}{EI}\cdot\frac{IH}{HF}\cdot\frac{FG}{GD} = 1$$ [B]

$$\frac{6}{2+\frac{8}{5}}\cdot\frac{IH}{HF}\cdot\frac{1+2}{5-2} = 1$$

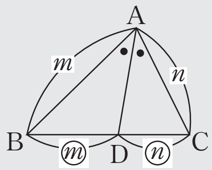
よって　$\frac{IH}{HF} = \frac{3}{5}$

ゆえに　$FI : HI = (5+3) : 3 = 8 : 3$



[C]　角の二等分線の性質

△ABC において，AD が ∠A の二等分線のとき　$BD : DC = AB : AC$

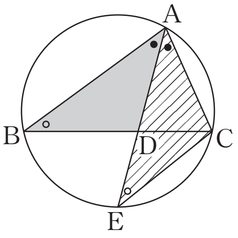


第 7 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：③，イ：③，ウ：⑥，エ：②

[解説]

△ABC の外接円と直線 AD の交点のうち，A でないものを E とする。



△ABD と △AEC において

$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{EAC}$

円周角の定理より

$\angle \mathrm{ABD} = \angle \mathbf{AEC}$

よって　$\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{AEC}$

ゆえに　$\mathrm{AB} : \mathbf{AE} = \mathrm{AD} : \mathrm{AC}$

よって　$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{AE} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}$　……(＊)

また，方べきの定理より　$\mathrm{DA} \cdot \mathbf{DE} = \mathrm{DB} \cdot \mathrm{DC}$ [A]

よって　$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{DE} = \mathrm{BD} \cdot \mathrm{CD}$　……(＊＊)

(＊)－(＊＊)より

$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{AE} - \mathrm{AD} \cdot \mathrm{DE} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} - \mathrm{BD} \cdot \mathrm{CD}$

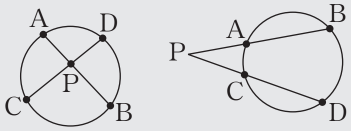
$\mathrm{AD}(\mathrm{AE} - \mathrm{DE}) = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} - \mathrm{BD} \cdot \mathrm{CD}$

$\mathrm{AD} \cdot \mathbf{AD} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} - \mathrm{BD} \cdot \mathrm{CD}$

ゆえに　$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} - \mathrm{BD} \cdot \mathrm{CD}$

[A]　方べきの定理

$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$



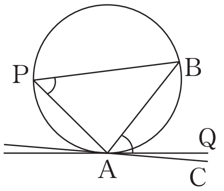
第 7 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：①

[解説]

△ABP の外接円の点 A における接線上に，右図のように点 C をとると，接弦定理より



　　∠**BAC** = ∠APB [A]

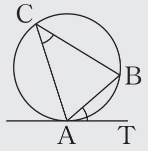
仮定より　∠BAQ = ∠APB

よって　∠BAC = ∠BAQ

点 Q は直線 AB に対して点 P と反対側にある点であるから，**3 点 A，C，Q は同一直線上**にある。

よって，2 直線 AQ，AC は一致し，直線 AQ は △ABP の外接円と接する。

[A]　下図において，次が成り立つ。
・直線 AT が点 A で円に接しているとき
　∠BAT = ∠ACB（接弦定理）
・∠BAT = ∠ACB のとき
　直線 AT が点 A で円に接する
（接弦定理の逆）

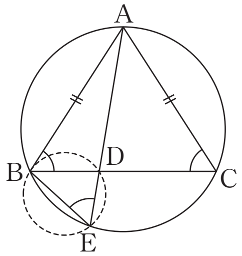


2

[正解] ウ：①，エ：③，オ：⑥

[解説]

△ABC は AB = AC の二等辺三角形であるから



　　∠**ABC** = ∠ACB

円周角の定理より

　　∠ACB = ∠**AEB**

よって

　　∠ABC = ∠AEB

したがって，**接弦定理の逆**より，直線 AB は，3 点 B，D，E を通る円と接する。[A]

第 8 講　PART1　確認問題 解答

1　**[正解]** アイウ：168，エオカ：216，キクケ：360

[解説]

(ii)より，b と c の最大公約数は 72 であるから

$b=72b'=2^3\cdot3^2\cdot b'$，[A]

$c=72c'=2^3\cdot3^2\cdot c'$

（b'，c' は互いに素な自然数で，$b'<c'$）

と表される。

また，b と c の最小公倍数は 1080 であるから

$72b'c'=1080$ [A]

よって　$b'c'=15$

これを満たす自然数 b'，c' は，$b'<c'$ より

$(b',\ c')=(1,\ 15),\ (3,\ 5)$

したがって

$(b,\ c)=(72,\ 1080),\ (216,\ 360)$ ……(＊)

(i)より，a，b，c の最大公約数は $24=2^3\cdot3$ であるから

$a=24a'=2^3\cdot3\cdot a'$

（a' は 3 の倍数ではない自然数）[B]

(iii)より，a と b の最小公倍数は　$1512=2^3\cdot3^3\cdot7$

(＊)より

$b=72=2^3\cdot3^2$ のとき

$a=2^3\cdot3\cdot7=168$ であるが，これは $a<b$ を満たさず不適。

$b=216=2^3\cdot3^3$ のとき

$a=2^3\cdot3\cdot7=168$ であり，これは $a<b$ を満たす。よって　$a=168$

以上より

$(a,\ b,\ c)=$ **(168，216，360)**

[A]　2 つの自然数 a，b の最大公約数を G とすると

$a=a'G$，　$b=b'G$

（a' と b' は互いに素）

と表される。このとき，a，b の最小公倍数を L とすると

$L=a'b'G$

と表される。よって

$ab=GL$

[B]　a' が 3 を約数にもつと，a，b，c の最大公約数が 24 より大きくなってしまう。

第8講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：1，ウ：2，エ：6，オ：2，
カ：1，キ：2，ク：6，ケ：8，コ：1

[解説]

すべての整数 n は，$2k$，$2k+1$（k は整数）のいずれかで表される。[A]

$n=2k$ のとき

$$3n^2+9n+5=3(2k)^2+9\cdot 2k+5$$
$$=12k^2+18k+5$$
$$=2(6k^2+9k+2)+1$$

$n=2k+1$ のとき

$$3n^2+9n+5=3(2k+1)^2+9(2k+1)+5$$
$$=12k^2+30k+17$$
$$=2(6k^2+15k+8)+1$$

よって，$3n^2+9n+5$ は奇数である。

（別解）

$n\equiv 0\pmod 2$ のとき [B]

$$3n^2+9n+5\equiv 3\cdot 0^2+9\cdot 0+5\equiv 5\equiv 1$$

$n\equiv 1\pmod 2$ のとき

$$3n^2+9n+5\equiv 3\cdot 1^2+9\cdot 1+5\equiv 17\equiv 1$$

よって，$3n^2+9n+5$ は奇数である。

[A]　k を整数とするとき，すべての整数は，正の整数 m で割ったときの余りで
　mk，$mk+1$，$mk+2$，……，
　$mk+(m-1)$
の m 通りに分類できる。

[B]　a，b を整数，m を自然数とするとき，$a-b$ が m の倍数である，すなわち a を m で割った余りと b を m で割った余りが等しいことを，a と b は m を「法」として「合同」であるといい，
　$a\equiv b\pmod m$
と表す。このような式を「合同式」という。
$a\equiv b\pmod m$，$c\equiv d\pmod m$
（a，b，c，d は整数，m は自然数）
とするとき
　$a+c\equiv b+d\pmod m$
　$a-c\equiv b-d\pmod m$
　$ac\equiv bd\pmod m$
　$a^n\equiv b^n\pmod m$
（ただし，n は自然数）

2 **[正解]** **サ**：3，**シ**：1，**ス**：2，**セ**：3，**ソ**：6，
タ：1，**チ**：1，**ツ**：1，**テ**：3，**ト**：2

[解説]

すべての整数 n は，$\mathbf{3k}$，$\mathbf{3k+1}$，$\mathbf{3k+2}$（k は整数）
のいずれかで表される。[A]

$n=3k$ のとき

$$2n^2+n+1=2(3k)^2+3k+1$$
$$=18k^2+3k+1$$
$$=\mathbf{3}(\mathbf{6}k^2+k)+\mathbf{1}$$

$n=3k+1$ のとき

$$2n^2+n+1=2(3k+1)^2+(3k+1)+1$$
$$=18k^2+15k+4$$
$$=3(6k^2+5k+\mathbf{1})+\mathbf{1}$$

$n=3k+2$ のとき

$$2n^2+n+1=2(3k+2)^2+(3k+2)+1$$
$$=18k^2+27k+11$$
$$=3(6k^2+9k+\mathbf{3})+\mathbf{2}$$

よって，$2n^2+n+1$ を3で割った余りは1または2
であり，$2n^2+n+1$ は3の倍数ではない。

（別解）

$n\equiv 0\pmod 3$ のとき [B]

$$2n^2+n+1\equiv 2\cdot 0^2+0+1\equiv 1$$

$n\equiv 1\pmod 3$ のとき

$$2n^2+n+1\equiv 2\cdot 1^2+1+1\equiv 4\equiv 1$$

$n\equiv 2\pmod 3$ のとき

$$2n^2+n+1\equiv 2\cdot 2^2+2+1\equiv 11\equiv 2$$

よって，$2n^2+n+1$ を3で割った余りは1または2
であり，$2n^2+n+1$ は3の倍数ではない。

第 8 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：1，ウ：4，エ：1，オ：②，
カ：1，キ：2，ク：②，ケ：①，コ：②

[解説]

(1)　すべての整数 n は，$\mathbf{2k}$，$\mathbf{2k+1}$（k は整数）のいずれかで表される。 [A]

$n=2k$ のとき

$$n^2=(2k)^2$$
$$=\mathbf{4k^2}$$

$n=2k+1$ のとき

$$n^2=(2k+1)^2$$
$$=4k^2+4k+1$$
$$=4(k^2+k)+\mathbf{1}$$

よって，n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

[A]　k を整数とするとき，すべての整数は，正の整数 m で割ったときの余りで
mk，$mk+1$，$mk+2$，……，$mk+(m-1)$
の m 通りに分類できる。

(2)　**a，b がともに奇数である**と仮定する。 [B]

このとき，(1)より a^2，b^2 はともに 4 で割った余りが **1** であるから，a^2+b^2 を 4 で割った余りは **2** である。また(1)より，c^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

よって，$\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$ **である**ことに矛盾するから，a，b がともに奇数であることはない。

したがって，a，b のうち少なくとも 1 つは偶数である。 [C]

[B]　背理法を利用して証明する。
命題の証明において，その命題が成り立たないと仮定し，矛盾を導くことによって，もとの命題が正しいことを証明する方法を背理法という。

[C]　$a^2+b^2=c^2$ を満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をピタゴラス数という。

(3)　$a=2l$，$b=2m+1$（l，m は整数）とおくと

$$c^2=(2l)^2+(2m+1)^2$$
$$=4(l^2+m^2+m)+1 \quad \cdots\cdots(*)$$

であるから，(1)より c は**奇数**である。

$c=2j+1$ (j は整数)とおくと，(＊)より

$$(2j+1)^2=4\left(l^2+m^2+m\right)+1$$

よって　$l^2=j(j+1)-m(m+1)$

$j(j+1)$ と $m(m+1)$ は，ともに連続する 2 整数の積であるから**偶数**である。

ゆえに，l^2 は偶数である。

(偶数)^2 = 偶数，(奇数)^2 = 奇数であるから，l も偶数である。

ゆえに，$2l$ は 4 の倍数である。

したがって，$a=2l$ より，a は 4 の倍数である。

第 9 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：7，ウ：3

[解説]

$3x-4y=21$ より

$$3(x-7)=4y \quad \cdots\cdots ①$$ [A]

3 と 4 は互いに素であるから，$x-7$ は 4 の倍数である。

よって，$x-7=4k$（k は整数）と表される。

このとき，①より　$3\cdot4k=4y$

ゆえに　$y=3k$

したがって，求める整数解は

$$\boldsymbol{x=4k+7,\ y=3k}\ (k \text{ は整数})$$

[A]　1 次不定方程式 $ax+by=c$（a，b は互いに素）は，

$$a(x-p)=b(y-q)$$

と変形する（p，q は整数）。

この形にできれば，

$$x-p=(b \text{ の倍数})$$

より，整数解を求めることができる。

2 **[正解]** **エオ**：32，**カキ**：52，**クケコ**：-37，

サシ：60

[解説]

$37x+32y=4$　……①

37 と 32 に互除法を用いると

$37=32\cdot1+5$ より　$5=37-32\cdot1$ **[B]**

$32=5\cdot6+2$ より　$2=32-5\cdot6$

$5=2\cdot2+1$ より　$1=5-2\cdot2$

これより

$$
\begin{aligned}
1&=5-2\cdot2\\
&=5-(32-5\cdot6)\cdot2\\
&=5\cdot13+32\cdot(-2)\\
&=(37-32\cdot1)\cdot13+32\cdot(-2)\\
&=37\cdot13+32\cdot(-15)
\end{aligned}
$$

よって　$37\cdot13+32\cdot(-15)=1$

この式の両辺を 4 倍して

$37\cdot52+32\cdot(-60)=4$　……②

① − ②より　$37(x-52)+32(y+60)=0$

ゆえに　$37(x-52)=-32(y+60)$　……③

37 と 32 は互いに素であるから，$x-52$ は 32 の倍数である。

よって，$x-52=32k$（k は整数）と表される。

このとき，③より　$37\cdot32k=-32(y+60)$

ゆえに　$y+60=-37k$

したがって，求める整数解は

$\boldsymbol{x=32k+52,\ y=-37k-60}$（$k$ は整数）

[B]　$ax+by=c$ を

$a(x-p)=b(y-q)$

に変形するために，ユークリッドの互除法で a と b の最大公約数を求め，その計算を逆にたどる（a，b は互いに素であるから，最大公約数は 1）。

第 9 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：2，ウ：4，エ：2，オ：2，カ：2

[解説]

$6x+5y+3z=28$ より

$$6x=28-5y-3z$$ [A]

$y \geqq 1$，$z \geqq 1$ より，$-5y \leqq -5$，$-3z \leqq -3$ であるから

$$6x=28-5y-3z \leqq 28-5-3=20$$

すなわち，$6x \leqq 20$ より　$x \leqq \dfrac{10}{3}$

x は自然数より　$x=1$，2，3

(i)　$x=1$ のとき

$6+5y+3z=28$ より　$5y+3z=22$

$-3z \leqq -3$ より　$5y=22-3z \leqq 22-3=19$

よって　$y=1$，2，3

このとき　$22-5y=17$，12，7

$3z=22-5y$ より，$22-5y$ は 3 の倍数であるから　$22-5y=12$

ゆえに　$y=2$，$z=4$

(ii)　$x=2$ のとき

$12+5y+3z=28$ より　$5y+3z=16$

$-3z \leqq -3$ より　$5y=16-3z \leqq 16-3=13$

よって　$y=1$，2

このとき　$16-5y=11$，6

$3z=16-5y$ より，$16-5y$ は 3 の倍数であるから　$16-5y=6$

ゆえに　$y=2$，$z=2$

(iii)　$x=3$ のとき

$18+5y+3z=28$ より　$5y+3z=10$

[A]　いずれの文字も自然数であるから，とりうる値の範囲が 1 以上であることに注目する。これを利用し，ある文字に関する不等式を立て，値を絞り込む。

$-3z \leqq -3$ より　$5y = 10-3z \leqq 10-3 = 7$

よって　$y=1$

このとき　$10-5y=5$

$3z = 10-5y$ より，$10-5y$ は 3 の倍数であるから，これを満たす y，z は存在しない。

(i)，(ii)，(iii)より，求める自然数 x，y，z の組は

$(x, y, z) = \mathbf{(1,\ 2,\ 4),\ (2,\ 2,\ 2)}$

2

[正解] **キ**：1，**ク**：1，**ケ**：3，**コ**：9，**サ**：4，**シ**：7，**ス**：6，**セ**：6

[解説]

$xy-5x-2y+6=0$ より

$x(y-5)-2(y-5)-10+6=0$

よって　$(x-2)(y-5)=4$ **[B]**

x, y は自然数であるから, $x-2$, $y-5$ は整数である。

また

$x-2 \geqq 1-2 = -1$，$y-5 \geqq 1-5 = -4$

したがって

$(x-2,\ y-5) = (-1,\ -4),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$

よって

$(x, y) = \mathbf{(1,\ 1),\ (3,\ 9),\ (4,\ 7),\ (6,\ 6)}$

[B]　因数分解を用いて，
（整数）×（整数）＝（整数）
の形に変形し，正負，偶奇，大小に注目して値を絞り込む。

3 **[正解]** ソ：3，タ：1，チ：2，ツ：2，テ：4，
ト：2，ナ：7，ニ：4

[解説]

(1)　$x^2+xy-6y^2+x+8y-2$

$=x^2+(y+1)x-6y^2+8y-2$

$=x^2+(y+1)x+(3y-1)(-2y+2)$

$=\boldsymbol{(x+3y-1)(x-2y+2)}$ [B]

1 ╲╱ $3y-1$ ⟶		$3y-1$
1 ╱╲ $-2y+2$ ⟶		$-2y+2$
1	$(3y-1)(-2y+2)$	$y+1$

(2)　$x^2+xy-6y^2+x+8y-20=0$ より

$$x^2+xy-6y^2+x+8y-2=18$$

(1)より　$(x+3y-1)(x-2y+2)=18$

x，y は自然数であるから，$x+3y-1$，$x-2y+2$ は整数である。

また　$x+3y-1\geqq 1+3\cdot 1-1=3$

よって

$$(x+3y-1,\ x-2y+2)$$
$$=(3,\ 6),\ (6,\ 3),\ (9,\ 2),\ (18,\ 1)$$

ここで，$x+3y-1=m$，$x-2y+2=n$ [C]

(m，n は整数)

とすると

$$x=\frac{1}{5}(2m+3n-4),\ y=\frac{1}{5}(m-n+3)$$

x が自然数になるのは

$$(m,\ n)=(3,\ 6),\ (9,\ 2),\ (18,\ 1)$$

$(m,\ n)=(3,\ 6)$ のとき　$x=4$，$y=0$

$(m,\ n)=(9,\ 2)$ のとき　$x=4$，$y=2$

$(m,\ n)=(18,\ 1)$ のとき　$x=7$，$y=4$

よって，求める自然数 x，y の組は

$$(x,\ y)=\boldsymbol{(4,\ 2),\ (7,\ 4)}$$

[C]　x，y の連立方程式の解を m，n を用いて表しておく。あとは，m，n に値を代入して，x，y が自然数になる場合を調べる。

第 9 講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** アイウエ：2500

[解説]

題意より　$5^4 \leqq N < 5^5$ [A]

Nは自然数であるから　$5^4 \leqq N \leqq 5^5 - 1$

これを満たす自然数 Nの個数は

$$(5^5-1)-5^4+1 = 5^5-5^4 = 5^4(5-1)$$
$$= 25^2 \cdot 4 = 25^2 \cdot 2^2$$
$$= 50^2 = \mathbf{2500}\ (\text{個})$$

[A]　n 進法で表すと m 桁となる自然数 Nは，

$1\underbrace{0\cdots0}_{m-1}{}_{(n)}$ 以上，$1\underbrace{0\cdots0}_{m}{}_{(n)}$未満

である。すなわち

$n^{m-1} \leqq N < n^m$

2 [正解] オ：5，カ：5，キ：2，クケコ：212

[解説]

$abc_{(6)}$ は 3 桁の 6 進数であるから

$1 \leqq a \leqq 5,\ 0 \leqq b \leqq 5,\ 0 \leqq c \leqq 5$

$cab_{(9)}$ は 3 桁の 9 進数であるから

$1 \leqq c \leqq 8,\ 0 \leqq a \leqq 8,\ 0 \leqq b \leqq 8$

よって　$1 \leqq a \leqq 5,\ 0 \leqq b \leqq 5,\ 1 \leqq c \leqq 5$

$N = abc_{(6)} = a \cdot 6^2 + b \cdot 6^1 + c \cdot 6^0$ [B]

$= 36a + 6b + c$

$N = cab_{(9)} = c \cdot 9^2 + a \cdot 9^1 + b \cdot 9^0$

$= 81c + 9a + b$

[B]　n_1 進法と n_2 進法を比較するときは，それぞれ 10 進法で表してから行うとよい。

$36a + 6b + c = 81c + 9a + b$ より

$27a = -5b + 80c$

ゆえに　$27a = 5(-b + 16c)$　……①

27 と 5 は互いに素であるから，a は 5 の倍数である。

$1 \leqq a \leqq 5$ より　$a = 5$

①より　$27 \cdot 5 = 5(-b + 16c)$

すなわち　$27 + b = 16c$　……②

よって，$27 + b$ は 16 の倍数である。

$0 \leqq b \leqq 5$ より　$27 \leqq 27 + b \leqq 32$

この範囲で 16 の倍数となるのは　$27 + b = 32$

よって　$b = 5$

②より　$c = 2$（$1 \leqq c \leqq 5$ を満たす）

以上より　$\boldsymbol{a = 5,\ b = 5,\ c = 2}$

したがって　$N = 36 \cdot 5 + 6 \cdot 5 + 2 = \mathbf{212}$